



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني
الإدارة المركزية لشؤون الكتب

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

الصف الثالث الإعدادي

تأليف

الأستاذ / عمر فؤاد جاب الله

الدكتور / عصام وصفي روفائيل

الأستاذ الدكتور / عفاف أبو الفتوح صالح

الأستاذ / كمال يونس كبشة

الأستاذ / سيرافيم الياس اسكندر

مراجعة

الافتحى حسن شحاتة

أسمير محمد سعادوى

إشراف علمي

مستشار الرياضيات

أ/ جمال الشاهد

إشراف تربوي

مركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

طبعة : ٢٠٢٢ / ٢٠٢٣ م

غير مصرح بداول هذا الكتاب
خارج وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني

.....: الاسم

.....: المدرسة

.....: الفصل

.....: العنوان

.....: العام الدراسي

مقدمة الكتاب

ابناءنا الاعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادي، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملاً ممتعاً ومفيداً له تطبيقاته في حياتكم العملية، وفي دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقذروا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسي، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفي نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى في هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوي لكم، وما سبق أن درستموه في الصفوف السابقة، كما راعينا في مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتي لديكم، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلي كلما كان ذلك مناسباً داخل المحتوى.

وفي الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات: يوجد تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خاص، واختيار في نهاية كل وحدة، وفي نهاية الفصل الدراسي يوجد نماذج اختبارات عامة تساعدكم على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الجبر

الوحدة الأولى: العلاقات و الدوال

- (١ - ١) حاصل الضرب الديكارتي ٢
- (٢ - ١) العلاقات ٨
- (٣ - ١) الدالة (التطبيق) ١٠
- (٤ - ١) دوال كثيرات الحدود ١٣

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسي

- (١ - ٢) النسبة ١٨
- (٢ - ٢) التناسب ٢٠
- (٣ - ٢) التغير الطردى و التغير العكسي ٢٦

الإحصاء

الوحدة الثالثة : الإحصاء

- (١ - ٣) جمع البيانات ٣٢
- (٢ - ٣) التشتت ٣٦



حساب المثلثات

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

- (١ - ٤) النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة ٤٤
- (٢ - ٤) النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا ٤٧

الهندسة التحليلية

الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية

- (١ - ٥) البعد بين نقطتين ٥٤
- (٢ - ٥) إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة ٥٧
- (٣ - ٥) ميل الخط المستقيم ٦٠
- (٤ - ٥) معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات ٦٥

الأنشطة والتدريبات والأختبارات ص ١-٤٤

الرموز الرياضية المستخدمة

ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	\perp	عمودي على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	$//$	يوازي
ن	مجموعة الأعداد النسبية	\overline{AB}	القطعة المستقيمة AB
\vec{N}	مجموعة الأعداد غير النسبية	\overleftarrow{AB}	الشعاع AB
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	\overleftrightarrow{AB}	المستقيم AB
$\sqrt[n]{}$	الجذر التربيعي للعدد A	$\angle (A)$	قياس زاوية A
$\sqrt[n]{}$	الجذر التكعيبي للعدد A	$\widehat{(AB)}$	قياس القوس AB
$[A, B]$	فترة مغلقة	\sim	تشابه
$[A, B[$	فترة مفتوحة	$<$	أكبر من
$[A, B]$	فترة نصف مفتوحة	\leq	أكبر من أو تساوي
$]A, B]$	فترة نصف مفتوحة	$>$	أقل من
$]A, \infty[$	فترة غير محدودة	\geq	أقل من أو تساوي
\equiv	تطابق	$L(A)$	احتمال وقوع الحدث A
$n(A)$	عدد عناصر الحدث A	\bar{s}	الوسط الحسابي
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف المعياري
		بح أو \sum	المجموع



قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.
هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

حاصل الضرب الديكارتي

فكر وناقش

- سبق وأن درست العلاقة بين متغيرين س، ص.
- أوجد مجموعة الأزواج المرتبة التي تُحقق العلاقة:
ص = ٢س - ١ عندما س = ٠، س = ١، س = ٢
 - مثل هذه الأزواج المرتبة بيانيًا في المستوى الإحداثي.
 - هل الزوج المرتب (٣، ٥) يساوي الزوج المرتب (٥، ٣)؟
(استعن بالرسم).
- مما سبق نلاحظ:

- في الزوج المرتب (أ، ب) يسمى أ بالمسقط الأول، ب بالمسقط الثاني.
- كل زوج مرتب يمثل بنقطة واحدة وواحدة فقط في المستوى الإحداثي.
- إذا كان $a \neq b$ فإن $(a, b) \neq (b, a)$ ، لماذا؟
- $(a, b) \neq (a, b)$.
- إذا كان $(a, b) = (س, ص)$ فإن $a = س$ ، $b = ص$

مثال ١

أوجد س، ص إذا كان: $(س - ٢, ٣) = (٥, ص + ١)$

الحل

$$س - ٢ = ٥ \quad س = ٧ \quad ، \quad ٣ = ص + ١ \quad ص = ٢$$

تدرب

أوجد أ، ب في كل مما يأتي:

- $(٥, -٩) = (ب, أ)$
- $(٣, -١) = (٢٦, ٧ - أ)$
- $(٣ - ب, ١ - أ) = (٢, -١)$
- $(٣ - أ, ٢ - ب) = (٢٦, ٧ - أ)$



سوف تتعلم

- ☆ كيفية إيجاد حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين غير خاليتين.

مصطلحات أساسية

- ☆ زوج مرتب
- ☆ حاصل ضرب ديكارتي
- ☆ مخطط سهمي
- ☆ مخطط بياني
- ☆ علاقة

إذا كانت $S = \{a, b\}$ ، $S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ فاوجد:

$S \times S$ ، $S \times S$ ، ماذا تلاحظ؟

الحل

لإيجاد حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة S في المجموعة S ويرمز له بالرمز $S \times S$ ، نكتب مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر من S ، ومسقطها الثاني عنصر من S فيكون:

$$S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

$$S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

نلاحظ أن: $S \times S = S \times S$

ويمكن الحصول على $S \times S$ من الجدولين الآتيين:

المسقط الثاني		\times	
ب	ا		
(ب، ا)	(ا، ا)	ا	المسقط الأول
(ب، ب)	(ا، ب)	ب	
(ب، ب)	(ا، ب)	ب	

المسقط الثاني			\times	
ا	ب	ب		
(ا، ا)	(ا، ب)	(ب، ا)	ا	المسقط الأول
(ا، ب)	(ب، ا)	(ب، ب)	ب	

فكر:

١ متى يكون $S \times S = S \times S$ ؟

٢ هل عدد عناصر $S \times S =$ عدد عناصر $S \times S$ ؟

ملاحظات:

١ إذا كانت S ، S مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين،

فإن: $S \times S = \{(a, b) : a \in S, b \in S\}$

٢ $S \times S \neq S \times S$ حيث: $S \neq S$

$$S \times S = (S \times S) \cup (S \times S) = (S \times S) \cup (S \times S)$$

حيث S ترمز إلى عدد عناصر المجموعة.

٣ إذا كان $(a, b) \in S \times S$ فإن $a \in S$ ، $b \in S$

٤ إذا كانت S مجموعة غير خالية

فإن: $S \times S = \{(a, b) : a \in S, b \in S\}$

و تكتب أحياناً S^2 وتقرأ (س اثنين).

مثال ٣

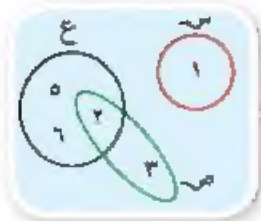


إذا كانت $S = \{1\}$ ، $V = \{2, 3\}$ ، $E = \{2, 5, 6\}$ مثل المجموعات S ، V ، E بشكل فن ثم أوجد:

- أولاً: $S \times V$ $S \times E$ $V \times E$
 ثانياً: $(S \times V) \cup (V \times E)$
 ثالثاً: $S \times (V \cap E)$
 رابعاً: $(S \times V) \cap (V \times E)$
 خامساً: $(E - V) \times (S \cup V)$

الحل

أولاً:



$$S \times V = \{(1, 2), (1, 3)\} = \{2, 3\} \times \{1\} = V \times S$$

$$V \times E = \{(2, 2), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 5), (3, 6)\} = E \times V$$

$$= \{(2, 2), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$S \times (V \cap E) = \{(1, 2)\} = \{2, 5, 6\} \times \{1\} = E \times S$$

$$= \{(2, 2), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 5), (3, 6)\} = V \times V$$

$$= \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$(S \times V) \cup (V \times E) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$S \times (V \cap E) = \{(1, 2)\} = \{2\} \times \{1\} = (V \cap E) \times S$$

$$(S \times V) \cap (V \times E) = \{(1, 2), (2, 2)\} = (E \times S) \cap (V \times V)$$

$$= \{(1, 2), (2, 2)\} = (E - V) \times (S \cup V) \cup (V \times V) \text{ أكمل}$$



إذا كانت $S = \{1, 2\}$ ، $V = \{0, 4\}$ ، $E = \{2, 5, 6\}$ أوجد

- أولاً: $S \times V$ $S \times E$ $V \times E$
 ثانياً: $(S \times V) \cup (V \times E)$
 ثالثاً: $S \times (V \cap E)$

تمثيل حاصل الضرب الديكارتي:

مثال ٤



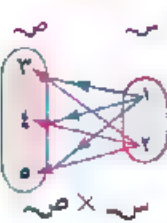
إذا كانت $S = \{1, 2\}$ ، $V = \{3, 4, 5\}$ أوجد: $S \times V$ ومثله:

أولاً: بالمخطط السهمي. ثانياً: بالمخطط البياني.



الحل

$$\{(0,2), (4,2), (3,2), (0,1), (4,1), (3,1)\} = \{0,4,3\} \times \{2,1\} = \text{س} \times \text{ص}$$

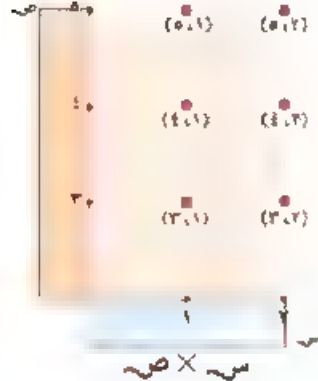


ويمثل حاصل ضرب الديكارتى $\text{س} \times \text{ص}$ بمخطط سهمي أو شبكة بيانية، كما يلي

أولاً: المخطط السهمي

رسم سهم من كل عنصر يمثل المسقط الأول وهي عناصر المجموعة س إلى كل عنصر يمثل المسقط الثاني (وهو عناصر المجموعة ص)

أي أن: المخطط السهمي لحاصل ضرب الديكارتى يُمثل كل زوج مرتب بسهم يخرج من مسقطه الأول وينتهي عند مسقطه الثاني.



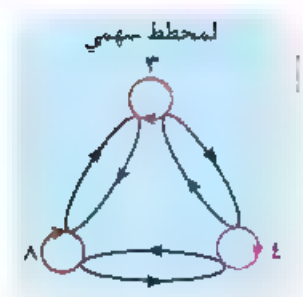
ثانياً: المخطط البياني (الشبكة البيانية المتعامدة)

تمثل على شبكة بيانية متعامدة عناصر المجموعة س أفقياً، وعناصر المجموعة ص رأسياً فتكون نقط تقاطع الخطوط الأفقية والرأسية تمثل الأزواج المرتبة لعناصر حاصل ضرب الديكارتى $\text{س} \times \text{ص}$.



إذا كانت $\text{س} = \{8, 4, 3\}$ فأوجد $\text{س} \times \text{ص}$ ومثله بمخطط سهمي.

الحل



$$\{8, 4, 3\} \times \{8, 4, 3\} = \text{س} \times \text{س}$$

$\{(8,8), (4,8), (3,8), (8,4), (4,4), (3,4), (8,3), (4,3), (3,3)\} =$
ويلاحظ في الشكل قد مُثلت الأزواج المرتبة بأسهم. وأن الأزواج المرتبة التي فيها المسقط الأول يساوي المسقط الثاني مثل $(8,8), (4,4), (3,3)$ مُثلت معروفة لتدل على أن لسهم يخرج من نقطة، وينتهي عند نفس النقطة.

لاحظ أن: $\text{س} = \{8, 4, 3\}$ فتكون: $\text{س} \times \text{س} = \{8, 4, 3\} \times \{8, 4, 3\} = 9$

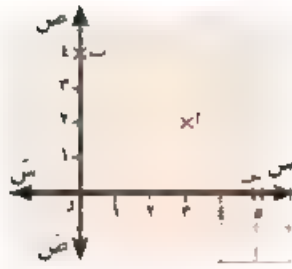
وفي هذه الحالة يمثل حاصل ضرب الديكارتى $\text{س} \times \text{ص}$ بيانياً تسع نقاط، وكل نقطة تمثل زوجاً مرتباً أما إذا كانت س مجموعة غير منتهية (لا يمكن حصر عدد عناصرها) فإن: عدد عناصر $\text{س} \times \text{ص}$ يكون غير منته.

فكر: كيف يمكن تمثيل حاصل ضرب الديكارتى لكل من:

$$\text{ط} \times \text{ط}, \text{ص} \times \text{ص}, \text{ه} \times \text{ه}, \text{ح} \times \text{ح}$$

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات غير المنتهية والتُمثيل البياني له

أولاً: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{P} \times \mathbb{S} = \{(\mathbb{S}, \mathbb{P}) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{P}, \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{S}\}$



رسم مستقيمين متعامدين أحدهما $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ أفقيًا والآخر $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{P}$ رأسيًا ومتقاطعين في النقطة و.

نمثر الأعداد الطبيعية \mathbb{P} على كل من المستقيمين الأفقي والرأسي مبتدئين بالنقطة (و) التي تمثل العدد صفر.

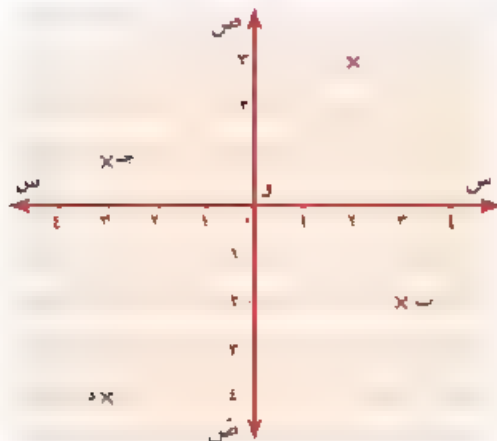
ترسم مستقيمتين رأسيّة وأخرى أفقيّة من النقط التي تمثل الأعداد الطبيعية، سوف نحصل على الشكل المقابل، وتكون نقط التقاطع لمجموعة هذه المستقيمت ممثلة للشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتي $\mathbb{P} \times \mathbb{S}$.

لاحظ أن: كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد لأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي $\mathbb{P} \times \mathbb{S}$.

فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢، ٣)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٤، ٠)

أكمل: النقطة ح تمثل لزوج المرتب (،)، النقطة د تمثل الزوج المرتب (،)

ثانياً: لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{S} \times \mathbb{S} = \{(\mathbb{S}, \mathbb{S}) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}\}$

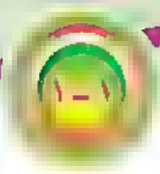


نمثر مجموعة الأعداد الصحيحة على كل من المستقيمين الأفقي والرأسي حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠، ٠)

فتكون كل نقطة من نقط الشبكة تمثل أحد الأزواج في حاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$.

وتعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثي $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$

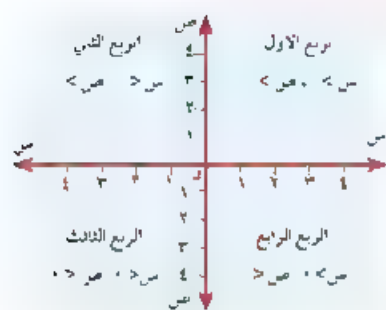
فمثلاً: النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣، ٢)، النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٢، ٣)



ثالثاً لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(\text{س}, \text{ص}) : (\text{س} \geq \text{ص}, \text{ص} \geq \text{س})\}$

ارسم شبكة بيانية متعامدة ومثل مجموعة الأعداد النسبية \mathbb{N} على المستقيمين الأفقي والرأسي، ثم عيّن عليها النقط: أ $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ ، ب $(\frac{3}{4}, 4)$ ، ج $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ ، د $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$

رابعاً لتمثيل حاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(\text{س}, \text{ص}) : \text{س} \geq \text{ص} \text{ و } \text{ص} \geq \text{س}\}$



حيث تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على كل من المستقيمين الأفقي والرأسي، كما تمثل النقطة (و) الزوج المرتب $(0, 0)$

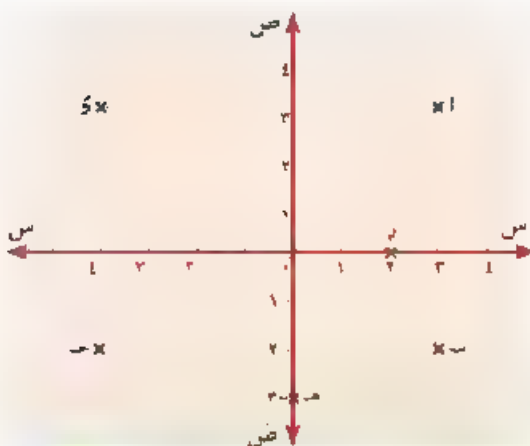
يسمى المستقيم الأفقي $\overrightarrow{\text{س}}$ محور السينات، ويسمى المستقيم الرأس $\overrightarrow{\text{ص}}$ محور الصادات
فتنقسم الشبكة إلى أربعة أقسام (أربع) كما بالشكل المقابل:



كوّن شبكة تربيعة متعامدة لحاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي ينتمي إليه كل من النقط الآتية:

أ $(3, 3)$ ، ب $(-2, 3)$ ، ج $(-2, -4)$ ، د $(3, -4)$ ، هـ $(3, 0)$ ، ز $(0, 2)$

الحل:



- | | |
|--------------|----------------------|
| أ $(3, 3)$ | تقع في الربع الأول |
| ب $(-2, 3)$ | تقع في الربع الثاني |
| ج $(-2, -4)$ | تقع في الربع الثالث |
| د $(3, -4)$ | تقع في الربع الرابع |
| هـ $(3, 0)$ | تقع على محور الصادات |
| ز $(0, 2)$ | تقع على محور السينات |



مجموعات

فكر وناقش



سوف نتعلم

- ☆ مفهوم العلاقة من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ.
- ☆ مفهوم العلاقة من مجموعة إلى نفسها.

مصطلحات أساسية

- ☆ علاقة.
- ☆ بيان العلاقة.



القراءة للجميع

في مهرجان القراءة لجميع ذهب خمسة تلاميذ يمثلون لمجموعة سـ = {أ، ب، ج، د، هـ} إلى مكتبة المدرسة لقراءة بعض الكتب التي تمسها المجموعة صـ = {علوم، أدب، ثقافة، تاريخ} فقرأ التلميذ (أ) كتاباً من كتب العلوم، وكتاباً من كتب الثقافة، وقرأ التلميذ (ب) كتاباً من كتب التاريخ. وقرأ التلميذ (ج) كتاباً أدباً، وقرأ التلميذ (هـ) كتاباً من كتب التاريخ. ولم يقرأ التلميذ (د) من هذه الكتب.

- ١ اكتب العبارات السابقة في صورة أزواج مرتبة من سـ إلى صـ.
- ٢ مثل مجموعة الأزواج المرتبة السابقة في صورة مخطط سهمي.

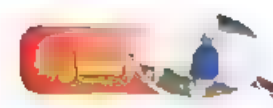
نلاحظ أن: التعبير «قرأ» قد ربط بين بعض عناصر المجموعة سـ ببعض عناصر المجموعة صـ أي أن التعبير «قرأ» يعين علاقة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ وسرّم لها عدة بالرمز ع وهذه العلاقة يمكن تمثيلها بمخطط سهمي كالمبين بالشكل المقابل، حيث نرسم سهمًا يند من التلميذ، وينتهي عند نوع الكتب التي قرأها. كما نستطيع أن نعبر عن العلاقة من سـ إلى صـ بمجموعة لأزواج المرتبة الآتية



{(أ، علوم)، (أ، ثقافة)، (ب، تاريخ)، (ج، أدب)، (هـ، تاريخ)}.

هذه المجموعة من الأزواج المرتبة تسمى بيان لعلاقة ع.

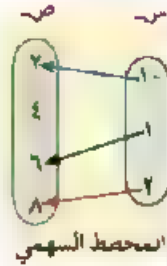
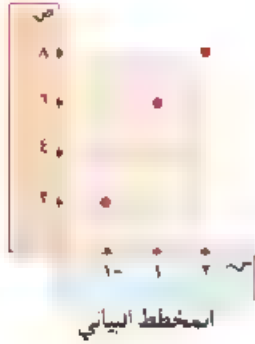
فكر هل بيان العلاقة ع مجموعة جزئية من حاصل الصرب الديكارتي سـ × صـ ؟



إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {٢، ٤، ٦، ٨}، وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني: «ب = ٢ + ١»، لكل أ ∈ سـ، ب ∈ صـ

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.





الحل

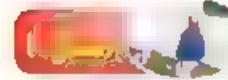
$$\begin{aligned} \text{عندما } 1 &= 1 \\ \text{عندما } 1 &= 1 \\ \text{عندما } 2 &= 2 \\ \therefore \text{ب} &= 4 + (1) \times 2 = 6 \\ \therefore \text{ب} &= 4 + 1 \times 2 = 6 \\ \therefore \text{ب} &= 4 + 2 \times 2 = 8 \\ \therefore \text{ع} &= \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\} \end{aligned}$$

مما سبق نستنتج أن

- العلاقة من مجموعة S إلى مجموعة T حيث S, T مجموعتان غير خاليتين هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر S ببعض أو كل عناصر T .
- بيان لعلاقة من مجموعة S إلى مجموعة T هي مجموعة الأزواج لمرتبة حيث المسقط الأول في كل منها ينتمي إلى المجموعة S ، والمسقط الثاني ينتمي إلى المجموعة T .
- إذا كانت E علاقة من مجموعة S إلى مجموعة T فإن $E \subseteq S \times T$.

العلاقة من مجموعة إلى نفسها

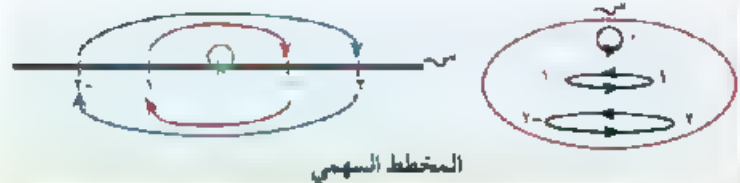
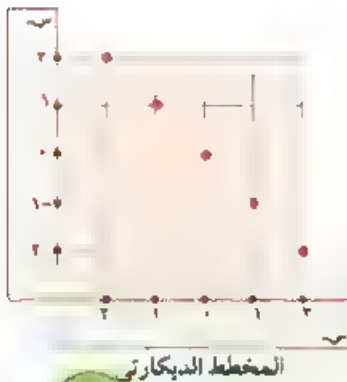
إذا كان E علاقة من S إلى S فإن E تسمى علاقة على المجموعة S وتكون $E \subseteq S \times S$.



إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وكانت E علاقة معرفة على S حيث $A \in E$ ب تعني «العدد A معكوس جمعي للعدد B ». لكل A, B $A \in E$ ب $\Leftrightarrow B = \frac{1}{A}$. اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر ديكارتي.

الحل

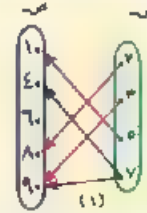
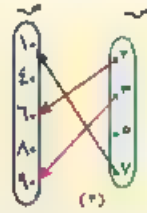
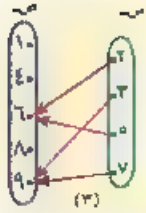
$$E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$





مكر وناقش

الأشكال الآتية تمثل ثلاث علاقات من S إلى V .



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم الدالة
- ☆ كيفية التعبير رمزيا عن الدالة

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة
- ☆ مجال
- ☆ المجال المقابل
- ☆ مدى

١ اكتب بيان كل علاقة ومثلها بمخطط بياني.

٢ أي من هذه العلاقات تحقق الشرط التالي كن عنصر من عناصر S ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر V .

تعريف

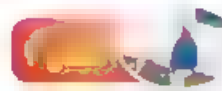
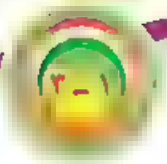
يقال لعلاقة من مجموعة S إلى مجموعة V أنها دالة إذا كان: كل عنصر من عناصر S يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.

التعبير الرمزي للدالة

- ١ يرمز للدالة بأحد الرموز: f أو g أو h أو ... والدالة f من المجموعة S إلى المجموعة V تكتب رياضياً: $f: S \rightarrow V$ وتقرأ: «دالة من S إلى V ».

ملاحظات:

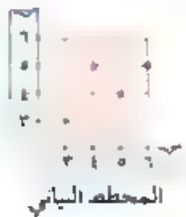
- ١ إذا كانت دالة من المجموعة S إلى نفسها نقول إن دالة على S .
- ٢ إذا كان الزوج المرتب (s, v) ينتمي لبيان الدالة فإن العنصر v يسمى صورة العنصر s بالدالة f . ونعبر عنه بإحدى الصورتين:
د: $s \rightarrow v$ وتقرأ الدالة: f ترسم s إلى v
أو د $(s) = v$ وتقرأ: د دالة حيث د $(s) = v$



إذا كانت د دالة على سـ حيث: سـ = {٣، ٤، ٥، ٦} وكان د (٣) = ٣، د (٤) = ٥، د (٥) = ٤، د (٦) = ٥.
مثل د بمخطط سهمي وآخر بياني، اكتب بيانها.

الحل:

بيان د = { (٣، ٣)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٥) }



المخطط البياني



المخطط السهمي



(٣)



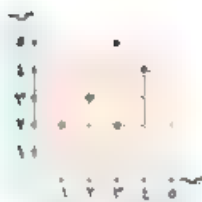
(٢)



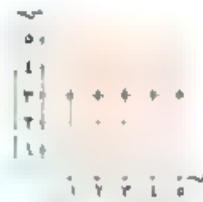
(١)

١ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣، ٤} فأَي من المخططات السَّهمية الآتية تعبر عن دالة على المجموعة سـ

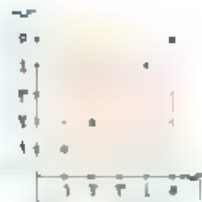
٢ أي من المخططات البيانية الآتية تعبر عن دالة من سـ إلى سـ.



(٣)



(٢)



(١)

فكر: هل كل علاقة دالة؟ فسّر إجابتك وأعط أمثلة.

المجال والمجال المقابل والمدى

إذا كانت د دالة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ، أي أن: د: سـ → صـ فإن:
المجموعة سـ تسمى مجال الدالة د.
المجموعة صـ تسمى المجال المقابل للدالة د.

مجموعة صور عناصر مجموعة المجال سـ بالدالة د تسمى مدى الدالة.

فمثلاً: إذا كانت د: سـ → صـ

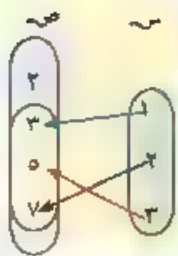
، سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}، بيان د = { (١، ٣)، (٢، ٥)، (٣، ٧) } فإن:

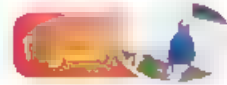
١ مجال الدالة د هو المجموعة سـ = {١، ٢، ٣}

٢ المجال المقابل للدالة د هو المجموعة صـ = {٢، ٣، ٥، ٧}

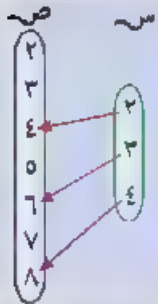
٣ مدى الدالة د هو مجموعة صور عناصر المجموعة سـ بواسطة الدالة د = {٣، ٥، ٧}

لاحظ أن: المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل للدالة.



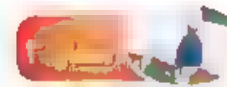


إذا كانت $S = \{2, 3, 4\}$ ، $V = \{ص, ط, 2 \leq ص < 9\}$ حيث P مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت f علاقة من S إلى V حيث $f(a) = b$ تعني « a لكر b » لكر $a \in S$ ، $b \in V$ ، اكتب بيان f ومثلها بمخطط سهمي. بين أن f دالة من S إلى V وأوجد مداها.



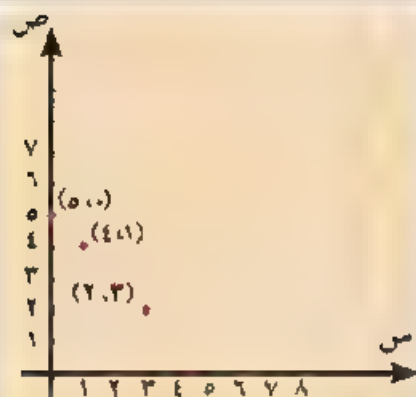
الحل

$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ، بيان $f = \{(2, ط), (3, 3), (4, 4)\}$
 f دالة لأن كل عنصر من عناصر S يخرج منه سهم واحد فقط لأحد عناصر V
 مدى الدالة $f = \{ط, 3, 4\}$



إذا كانت $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ وكانت $D = \{ص, ط, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ حيث $D = \{ص, ط, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ، أوجد: ١- أوجد صور عناصر S بالدالة f .
 ٢- ارسم مخطط بياني للدالة f .

الحل



$D = \{ص, ط, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$D = \{ص, ط, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

بيان الدالة $f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

مدى الدالة $f = \{0, 1, 2\}$

دوال كثيرة الحدود

فكر وناقش

في الدوال

$$د: ع \leftarrow ع, د(س) = ٥$$

$$ر: ع \leftarrow ع, ر(س) = ٣س - ٨$$

$$و: ع \leftarrow ع, و(س) = ٤س^٢ - ٥س + ٨$$

نلاحظ أن:

١ المجال والمجال المقابل لـ $د$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $ع$.

٢ قاعدة الدالة (صورة $س$) هي حد أو مقدار جبري.

٣ ما قوة لمتغير $س$ في الدوال السابقة؟

تعريف

الدالة $د: ع \leftarrow ع$ حيث:

$$د(س) = ا١س + ا٢س + ... + انس^٢ حيث ا١, ا٢, ..., ان \in ع$$

$ن \in ط, ان \neq ٠$ ، تسمى كثيرة حدود حقيقية من الدرجة $ن$.

ونكون: درجة كثيرة الحدود هي أكبر قوة لمتغير في قاعدة الدالة.



١ أي من الدوال التالية تمثل كثيرة حدود:

$$د١(س) = ٣س^٢ + ٢س + ٧ \quad د٢(س) = ٣س^٢ + \frac{١}{س} + ٧$$

$$د٣(س) = ٨س^٢ + ٧س + ٨ \quad د٤(س) = (س + \frac{١}{س})^٢$$

٢ إذا كانت $د: ع \leftarrow ع$ فاذكر درجة الدالة في كل حالة:

$$د١(س) = ٣س^٢ - ٢س \quad د٢(س) = (س - ٢س^٢) - (٣س - ٢)$$

$$د٣(س) = (س - ٢س^٢) - (٣س - ٢) \quad د٤(س) = (س - ٢س^٢) - (٣س - ٢)$$



إذا كان $D(s) = s^2 - s + 3$ أوجد: $D(-2)$ ، $D(0)$ ، $D(37)$

الحل:

$$\begin{aligned} \therefore D(s) = s^2 - s + 3 & \quad \therefore D(-2) = (-2)^2 - (-2) + 3 = 4 + 2 + 3 = 9 \\ D(0) = 0^2 - 0 + 3 & = 3 \quad D(37) = (37)^2 - 37 + 3 = 1369 - 37 + 3 = 1335 \end{aligned}$$



إذا كانت: $D(s) = s^2 - 3s$ ر $(s) = s - 3$

أوجد: $D(37) + 3$ ر $(37) = 4$ أثبت $D(3) = 0$ صفر

الدالة الخطية

تعريف

الدالة $D: C \leftarrow C$ حيث $D(s) = as + b$ ، $a \neq 0$ ، $b \in C$ ، $a \neq 0$ تسمى هذه الدالة دالة خطية، أو دالة من الدرجة الأولى.

التمثيل البياني للدالة الخطية:



مثل بيانياً الدالة $D: C \leftarrow C$ ، $D(s) = 2s - 3$

الحل:

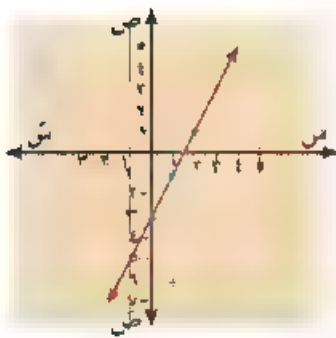
$$\therefore D(s) = 2s - 3$$

$$\therefore D(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \quad D(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \quad D(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

يمكن وضع هذه الأزواج المرتبة داخل جدول كالآتي:

س	ص
0	-3
1	-1
2	1

وتمثل الأزواج المرتبة على الشبكة التريعية لحاصل الضرب الديكارتي $C \times C$





٢ إذا كانت $C \leftarrow C, D (S) = A_S$ ، حيث $A \neq 0$ ، فإنه يمثلها بيانياً مستقيم يمر بنقطة الأصل $(0,0)$.



۶) د: د (س) - م + ۲ ۷) ر: ر (س) - ۳ س ۸) ق: ق (س) - ۲ س

حالة خامسة: إذا كانت د: ح ← ع، د (س) = ب حيث ب ⊃ ح
فإن د تُسمى دالة ثالثة.

فمثلاً: د (س) = ٣ وتكتب ص = ٣

فمثلاً: د (س) = ۳ و تکتب ص = ۳ س ۱- ۱ ۲
تمثل بمستقیم یوازی محور السینات. ص - د (س) ۳ ۳ ۴



۱) د (س) = ۵ ۲) د (س) = ۴ ۳) د (س) = ۰ ۴) د (س) = $2\frac{1}{4}$

الدالة التربيعية

الدالة د: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ حيث $D(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots$ ، ج: أعداد حقيقية، $A \neq \emptyset$.
تسمى دالة تربيعية. وهي دالة من الدرجة الثانية.

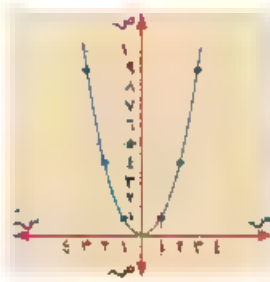
التمثيل البياني لدالة التربيعية



الحل

نعتبر بعض لأزواج المرتبة (س، د (س)) التي تنتمي إلى بيان المالة د حيث $s \in C$ وأن الفترة $[2, 3]$ تعطى بعض القيم الممكنة للمتغير س.

$$9 - (3) \text{ d.c.f.} - (2) \text{ d.c.f.} - (1) \text{ d.c.f.} - (0) \text{ d.c.f.} - (1-) \text{ d.c.f.} - (2-) \text{ d.c.f.} - (3-) \text{ d.c.f.}$$



نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالآتي:

س	٣	٢	١	٠	١	٢	٣
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

نعين في المستوى الديكارتي النقاط التي تمثل هذه الأزواج المرتبة. ثم نرسم منحنياً ممهداً يمر بهذه النقاط.

لاحظ أن:

١) منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل $s = 0$.

٢) إحداثي رأس المنحنى $(0, 0)$ والقيمة الصغرى للدالة $= 0$.

بصفه عامه الداله د (س) = |س| + بس + ج، ا، ب، ج أعداد

حقيقيه، $|ا| \neq 0$ صفر يكون لها الخصائص الثلاثيه:

١) إحداثيات نقطة رأس المنحنى $(-\frac{ب}{ا}, \frac{٤ا٣ - ب٢}{٤ا})$

٢) منحنى الداله يكون مفتوح إلى أعلى \cup عندما يكون معامل س موجباً ($|ا| < 0$ صفر)

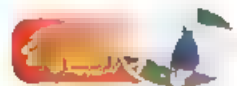
وفي هذه الحالة يكون للدالة قيمة صغرى تساوي د $(-\frac{ب}{ا})$

٣) منحنى الداله يكون مفتوح إلى أسفل \cap عندما يكون معامل س سالباً ($|ا| > 0$ صفر)

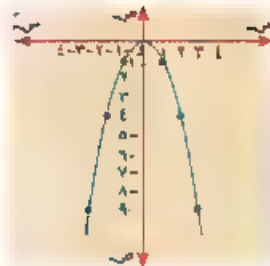
وفي هذه الحالة يكون للداله قيمه عظمى تساوي د $(-\frac{ب}{ا})$

٤) منحنى الداله د (س) يكون متماثلاً حول الخط الرأسى المار بنقطة رأس المنحنى

وتكون معادلة هذا الخط $s = -\frac{ب}{ا}$ ويسمى هذا الخط محور تماثل الداله.



مثل بياناً الدالة التربيعية د حيث: د (س) = $-س^2$ ، س \in ح متخذاً $s \in [-3, 3]$



الحل:

نكرر نفس خطوات الحل السابقة:

س	٣	٢	١	٠	١	٢	٣
ص = د (س)	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩

ومن الرسم نلاحظ أن:

٧) منحنى الدالة د متماثل بالنسبة لمحور الصادات، وتكون معادلة محور التماثل $s = 0$.

٨) إحداثي رأس المنحنى $(0, 0)$ والقيمة العظمى للدالة $= 0$.

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب
والخطوط الطول والعرض والعكس

الجبر

تعلم؟

أن وزن الجسم على سطح القمر يساوي $\frac{1}{6}$ وزنه على سطح الأرض
تصور أنك ذهبت في رحلة للقمر، كم سيصبح وزنك؟

مكرر ٩ سامش



سوف نتعلم

- ☆ مفهوم النسبة.
- ☆ خواص النسبة.

درسنا فيما سبق موضوع النسبة، وعلمنا أن النسبة هي: مقارنة بين كميتين.

فمثلاً: إذا كان هناك ٤ أولاد، ٣ بنات، فإن النسبة بين عدد الأولاد إلى عدد البنات يمكن كتابتها بإحدى الصور ٤ إلى ٣ أو $\frac{4}{3}$

وعموماً إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن النسبة



بين العدد أ والعدد ب

نكتب بإحدى الصور: أ إلى ب أو أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

ويسمى أ مقدم النسبة، ويسمى ب تالي النسبة، ويسمى أ، ب معاً بحدى النسبة.

المصطلحات الأساسية

- ☆ مقدم النسبة.
- ☆ تالي النسبة.
- ☆ حدّ النسبة.

أكمل وأجب عن الأسئلة:

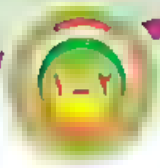
١ هل تتغير النسبة إذا ضرب كل من حديها في مقدار ثابت لا يساوي الصفر؟

$$\frac{3}{5} \times 3 = \frac{3}{5} \times 5$$

٢ هل تتغير النسبة إذا أضفنا عدداً حقيقياً لكل من حديها؟

$$\frac{3}{5} + 2 = \frac{3}{5} + 3$$

٣ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{3}{5}$ ، هل أ - ٣، ب - ٥ لجميع قيم أ، ب؟



(١) مثال

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد س.

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{7 + \text{س}}{11 + \text{س}} \quad \therefore 2(11 + \text{س}) = 3(7 + \text{س})$$

$$\therefore 22 + 2\text{س} = 21 + 3\text{س} \quad \therefore 2\text{س} - 3\text{س} = 21 - 22$$

$$\therefore \text{س} = 1$$

(٢) مثال

أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ : ٤٦ وطرح مربعه من ناليتها فإننا نحصل على النسبة ٣ : ٢

الحل

نفرض أن العدد المطلوب = س حيث $\text{س} \in \mathbb{H}$. \therefore مربعه = س^2

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{29 + \text{س}^2}{46 - \text{س}^2}$$

$$\therefore 2(46 - \text{س}^2) = 3(29 + \text{س}^2)$$

$$\therefore 92 - 2\text{س}^2 = 87 + 3\text{س}^2 \quad \therefore 5 = 5\text{س}^2$$

$$\therefore \text{س}^2 = 1 \quad \therefore \text{س} = 1$$



سوف نتعلم

- ☆ مفهوم التناسب
- ☆ خواص التناسب
- ☆ انتناسب المتسلسل

المصطلحات الأساسية

- ☆ تناسب
- ☆ أول متناسب
- ☆ ثاني متناسب
- ☆ ثالث متناسب
- ☆ رابع متناسب
- ☆ طرفا التناسب
- ☆ وسطا التناسب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، ج، د كميات متناسبة، وإذا كانت الكميات أ، ب، ج، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

تعريف:

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

في التناسب $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

فإن أ يسمى (الأول متناسب)، ب يسمى (الثاني متناسب)، ج يسمى (الثالث متناسب)، د يسمى (الرابع متناسب).

كما يسمى أ، د طرفي التناسب، ب، ج وسطى التناسب.

خواص التناسب

أولاً: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن:

$$① \quad أ = م \cdot ج ، ب = م \cdot د \quad \text{حيث } م \neq 0$$

$$② \quad أ د = ب ج \quad (\text{حاصل ضرب الطرفين} = \text{حاصل ضرب الوسطين})$$

$$③ \quad \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \Rightarrow \frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$$

تحقق من الخواص السابقة بإعطاء أمثلة عديدة من عندك

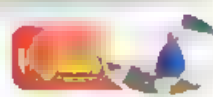
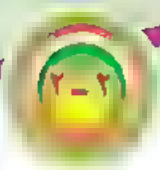
ثانياً: إذا كان: $أ د = ب ج$ فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \Rightarrow \frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$$

تحقق من الخواص بالمثل العددي الآتي.

نعلم أن: $١٦ \times ٢ = ٨ \times ٤$

$$\frac{١٦}{٨} = \frac{٤}{٢} \quad \text{فإن:} \quad \frac{١٦}{٨} = \frac{٤}{٢}$$



إذا كانت $\frac{2}{3}$ - أوجد قيمة النسبة: $\frac{3س+2ص}{6ص-3س}$

الحل

نفرض أن $س = 2م$ ، $ص = 3م$ (حيث $م$ ثابت \neq صفر)

$$\therefore \frac{3س+2ص}{6ص-3س} = \frac{3 \times 2م + 2 \times 3م}{6 \times 3م - 3 \times 2م} = \frac{6م + 6م}{18م - 6م} = \frac{12م}{12م} = 1$$

حل آخر

بقسمة كل من البسط والمقام على $ص$ ثم التعويض عن قيمة $\frac{س}{ص}$

$$\therefore \frac{3س+2ص}{6ص-3س} = \frac{3 + \frac{س}{ص} \times 2}{6 - 3 \times \frac{س}{ص}} = \frac{3 + \frac{2}{3} \times 3}{6 - 3 \times \frac{2}{3}} = \frac{3 + 2}{6 - 2} = \frac{5}{4}$$



أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤، ١٢، ١٦.

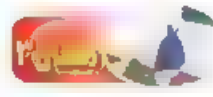
الحل

نفرض أن الرابع المتناسب $س$

$$\frac{16}{12} = \frac{4}{س}$$

[حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين] $16 \times س = 4 \times 12$

$$\therefore س = \frac{4 \times 12}{16} = 3$$



أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣، ٥، ٨، ١٢ فإنها تكون متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد $س$ فتكون الأعداد $3س$ ، $5س$ ، $8س$ ، $12س$ متناسبة

$$\therefore (3س + 8س) - (5س + 12س) = (8س + 12س) - (5س + 3س)$$

$$11س - 9س = 10س - 8س \therefore 2س = 2 \therefore س = 1$$



افرض $\frac{1}{d} = \frac{m}{m}$ حيث m مقدار ثابت
 أ- ب m ، ج- d عوض في كلا الطرفين.



أولاً: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ثانياً: $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

إشهاد: افرض أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ حيث m مقدار ثابت $\neq 0$ وأكمل
أو بأي طريقة أخرى.

التناسب المتسلسل

٢، ٦، ١٨ ثلاثة أعداد. قارن بين النسب $\frac{2}{7}$ ، $\frac{7}{18}$

هل توجد علاقة بين $(6)^2$ وحاصل الضرب 2×18 ؟

إذا استبدل العدد 6 بالعدد (٦٠) هل توجد علاقة بين (٦٠) وحاصل الضرب ٩١٨×٢ ؟

تعريف:

يقال للكميات أ، ب، ج: إنها في تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج}$
يسمى أ بالأول المتناسب، ب بالوسط المتناسب، ج بالثالث المتناسب
حيث: $ب^2 = أ ج$ أو $ب = \sqrt{أ ج}$



أوجد الوسط المتناسب بين ٣، ٢٧

الحل :

$$\text{الوسط المتناسب} = \sqrt{3 \times 27} = 9$$



إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين أ، ج، **هائنت أن:** $\frac{1}{ب} = \frac{أ+ج}{ب^2}$

الحل

ب وسط متناسب بين أ، ج

أي أ، ب، ج في تناسب متسلسل
 $\therefore ب = ج \cdot م، أ = ب \cdot م = ج \cdot م^2$

نفرض $\frac{1}{ب} - \frac{1}{ج} = م$

الطرف الأيمن - $\frac{أ+ج}{ب^2} = \frac{ج \cdot م^2 + ج}{ج^2 \cdot م^2} = \frac{ج \cdot م^2 (1+1)}{ج^2 \cdot م^2} = \frac{2}{ج}$

(١) $\frac{1}{ب} - \frac{1}{ج} = م = \frac{2}{ج}$

(٢) **الطرف الأيسر** $\frac{1}{ج} = \frac{ج \cdot م}{ج^2} = \frac{م}{ج}$

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{1}{ب} = \frac{أ+ج}{ب^2}$



حل آخر :

بفرض: $\frac{1}{a} = \frac{b}{c} = m$

من النسبتين الأولى والثانية

$$\frac{1}{a} = m \Rightarrow a = \frac{1}{m}$$

$$\frac{b}{c} = m \Rightarrow b = mc$$

الطرف الأيمن =

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = m + mc = m(1+c)$$

الطرف الأيسر

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{mc}{c} = m$$

من (١)، (٢)

أكمل ما يأتي : (٧)

١- إذا كانت : ٧، س، $\frac{1}{ص}$ في تناسب متسلسل

فإن : س^٢ص =

٢- الوسط المتناسب لـ كميتين ٩س^٢ - ٢٥ص^٢ ، ٣س + ٥ص هو

١- ٧، س، $\frac{1}{ص}$ في تناسب متسلسل فإن $\frac{1}{ص} = \frac{٧}{س}$

∴ س^٢ص = ٧

٢- ∴ ٩س^٢ - ٢٥ص^٢ ، م ، $\frac{٣س + ٥ص}{٣س - ٥ص}$ في تناسب متسلسل

حيث م الوسط المتناسب

$$\frac{٩س^٢ - ٢٥ص^٢}{٣س - ٥ص} = \frac{٣س + ٥ص}{٣س - ٥ص} \Rightarrow ٩س^٢ - ٢٥ص^٢ = (٣س + ٥ص)(٣س - ٥ص)$$

$$٩س^٢ - ٢٥ص^٢ = ٩س^٢ - ١٥ص^٢ - ١٥ص^٢ + ٢٥ص^٢$$

$$٠ = ٠$$



التغير الطردى

أولاً - التعير الطردى

مكر 9 - سافش (1)



تتحرك سيرة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٥ م/ث
فإذا كانت المسافة لمقطوعة **ف** بالمتر فى زمن
قدره **ن** ثانية تعطى بالعلاقة: **ف = ع × ن**.

ن	١	٢	٣	٤
ف	١٥	٣٠	٤٥	٦٠

مثل العلاقة بين **ف**، **ن** بيانياً.

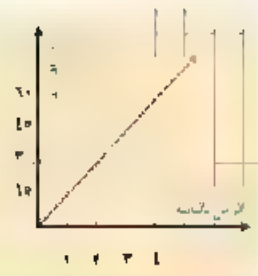
هو التمثيل البياني يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)

أوجد $\frac{ف}{ن}$ فى كل حالة. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ مما سبق أن:

$\frac{ف}{ن}$ تساوى فى كل مرة مقداراً ثابتاً وهو ١٥

ي **ف = ١٥ ن** ويقال حينئذ إن **ف** تتغير طردياً
بتغير **ن** وتكتب رمزياً **ف ∝ ن**.



سوف نتعلم

- ☆ مفهوم التغير الطردى
- ☆ مفهوم التغير العكسى
- ☆ كيفية التمييز بين التغير الطردى والتغير العكسى.

المصطلحات الأساسية

- ☆ تغير
- ☆ تغير طردى
- ☆ تغير عكسى

تعريف:

يقال: إن **ص** تتغير طردياً مع **س** وتكتب **ص ∝ س** إذا كانت **ص - م س**
(حيث **م** ثابت $\neq ٠$) وإذا أخذ المتغير **س** القيمتين **س_١**، **س_٢** وأخذ المتغير **ص**
القيمتين **ص_١**، **ص_٢** على الترتيب فإن: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

مما سبق نستنتج أن:

١ العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين س، ص ويمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ إذا كانت ص = ٥٠ س فإن ص = م س وكذلك إذا كانت ص = م س فإن ص = ٥٠ س



إذا كانت ص = ٥٠ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ **فأوجد**
أولاً: العلاقة بين ص، س ثانياً: قيمة ص عندما س = ٦٠

الحل:

أولاً: ص = ٥٠ س \therefore ص = م س (حيث م ثابت $\neq ٠$)

وبالتعويض عن قيمتي س، ص في العلاقة

$$١٤ = ٥٠ \times م \quad \therefore م = \frac{١٤}{٥٠} = \frac{١}{٣} \quad \therefore \text{العلاقة هي: ص} = \frac{١}{٣} \text{ س}$$

$$\text{ثانياً: عندما س} = ٦٠ \quad \therefore \text{ص} = \frac{١}{٣} \times ٦٠ = ٢٠$$

ملحظة: يمكن استخدام العلاقة $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ لإيجاد قيمة ص في المطلوب الثاني

ثانياً: التغير العكسي

إذا كانت مساحة المستطيل م وأحد بعديه س والبعد الآخر ص.

أ اكتب العلاقة بين كل من م، س، ص.

ب إذا كانت مساحة المستطيل ثابتة وتساوي ٣٠ سم^٢ **فاكمل** الجدول الآتي:

س	٣	٥	٦	١٠
ص				

ج **أوجد** س ص في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

مما سبق نلاحظ أن:

س ص = ٣٠ أي أن ص = $\frac{٣٠}{\text{س}}$ أي أن ص تتغير عكسياً بتغير س وتكتب رمزياً ص = $\frac{٣٠}{\text{س}}$

وبالمثل س = $\frac{٣٠}{\text{ص}}$ أي أن س تتغير عكسياً بتغير ص وتكتب رمزياً س = $\frac{٣٠}{\text{ص}}$

تعريف:

يقال إن v تتغير عكسياً مع s وتكتب $v \propto \frac{1}{s}$ إذا كانت $s = m$ (حيث m ثابت $\neq 0$)
وإذا أخذ المتغير من القيمتين s_1, s_2 وتبعاً لذلك أخذ المتغير من القيمتين v_1, v_2 على
الترتيب فإن: $\frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2}$

مما سبق نستنتج أن:

① العلاقة السابقة ليست علاقة خطية بين المتغيرين s, v ولا يمثلها خط مستقيم.

② إذا كنت v تتغير عكسياً مع s فإن $\frac{v}{s} = m$ (حيث m ثابت $\neq 0$)
وكذلك إذا كانت $v = \frac{m}{s}$ فإن $v \propto \frac{1}{s}$.



إذا كانت $v \propto \frac{1}{s}$ وكانت $v = 3$ عندما $s = 2$
أولاً: اوجد العلاقة بين s, v .
ثانياً اوجد قيمة v عندما $s = 1,5$.

الحل:

$\therefore v \propto \frac{1}{s}$ $\therefore \frac{v}{s} = m$ (حيث m ثابت $\neq 0$)

وبالتعويض عن قيمتي s, v في العلاقة

$$\frac{3}{2} = m \quad \therefore m = 3 \times 2 = 6$$

\therefore العلاقة هي: $v = \frac{6}{s}$

$$\therefore \text{عندما } s = 1,5 \quad \therefore v = \frac{6}{1,5} = 4$$

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة v من العلاقة $\frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2}$



بين أي من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا، وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا، وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًا أو عكسيًا مع ذكر السبب في كل حالة:

س	ص
٣	٦
٢-	٩-
١٨-	١
٩	٢-

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

مثال ٣

الربط بالقيمة إذا كانت العلاقة بين السرعة ع (متر / ث) و الزمن ن (ثانية) هي $ع = ٩,٨ ن$
أولاً: حدد نوع التغير بين ع، ن.

ثانياً: اوجد قيم ع عندما ن = ٢ ثانية، ن = ٤ ثوانٍ

جـ: اوجد قيمة ن عندما ع = ٢٤,٥ متر/ث

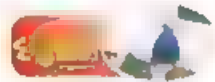
الحل:

أولاً: ع - ثابت \times ن أي ع متناسبة طرديًا بتغير ن.

ثانياً: ع عندما ن = ٢ تكون $ع = ٢ \times ٩,٨ = ١٩,٦$ متر/ث

ع عندما ن = ٤ تكون $ع = ٤ \times ٩,٨ = ٣٩,٢$ متر/ث

ع عندما ع = ٢٤,٥ تكون $٢٤,٥ = ٩,٨ \times ن$ $\therefore ن = \frac{٢٤,٥}{٩,٨} = ٢,٥$ ثانية.



الربط بالهندسة إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطرها (نق)، وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم؛ فاوجد (ع) عندما نق = ١٥,٧٥ سم



الحل

$$\therefore \text{ع} = \text{م} \times \frac{1}{\text{نق}} \quad (\text{حيث م ثابت} = ١٠)$$

$$\text{ع} = ٢٧ \text{ عند نق} = ١٠,٥$$

$$\therefore \text{م} = ٢٧ \times \frac{1}{(10,5)} \quad \therefore \text{م} = ٢٧ \times (10,5)$$

$$\text{وبالتعويض} \quad \therefore \text{ع} = ٢٧ \times (10,5) \times \frac{1}{\text{نق}} \quad \text{من (١)}$$

$$\text{وعندما نق} = ١٥,٧٥ \quad \therefore \text{ع} = ٢٧ \times (10,5) \times \frac{1}{(15,75)} = ١٢ \text{ سم}$$

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد الخطوة الأخيرة كما يلي:

$$27 \times 10.5 \div 15.75 =$$

(٥)

الربط مع الكيمياء : إذا كانت العلاقة بين كل من الكثافة (ث) والكتلة (ك) والحجم (ح) هي

$$\text{ث} = \frac{\text{م}}{\text{ح}} \quad (\text{حيث م ثابت} = ١٠)$$

أولاً : حدد نوع التغير بين ث ، ك ونوع التغير بين ث ، ح

ثانياً : أوجد قيمة م إذا كان ث = ٦ جم / سم^٣ ، ك = ٣٠ جم ، ح = ٧ سم^٣

ثالثاً : أوجد قيمة ح إذا كان ك = ٤,٥ كجم ، ث = ٩ كجم / م^٣

الحل

أولاً : الكثافة (ث) تتناسب طردياً مع الكتلة (ك) ، تتناسب عكسياً مع الحجم (ح)

$$\text{ثانياً :} \quad \text{ث} = \frac{\text{م}}{\text{ح}} \quad \leftarrow \quad \frac{(30) \text{ م}}{7} = 6 \quad \leftarrow \quad \frac{7}{5} = \frac{42}{30} = \text{م}$$

$$\text{ثالثاً : وعندما ك} = ٤,٥ \text{ كجم ، ث} = ٩ \text{ كجم / م}^3 \quad \therefore \quad \frac{4,5 \times 7}{\text{ح}^3} = 9$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{4,5 \times 7}{9} = ٣,٥ \text{ م}^3$$

الإحصاء

الوحدة الثالثة

الإحصاء



مطعم للمثلجات يقدم أنواعا مختلفة منها. قام صاحب المطعم بعمل استطلاع للرأى عن أنواع المثلجات المفضلة لدى المستهلكين. ستساعدك دراسة علم الإحصاء فى اختيار عينة ممثلة لمجتمع المستهلكين.



مصادر البيانات

مكر وناقش

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التي يعتمد عليها البحث الإحصائي، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمي صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائي واتخاذ القرارات المناسبة.

❶ ما مصادر جمع البيانات؟ ❷ كيف يتحدد أسلوب جمع البيانات؟

مصادر جمع البيانات

❶ مصادر أولية مصادر ميدانية

وهي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر، حيث تجمع البيانات عن طريق المقابلة الشخصية أو الاستبيان (استطلاع الرأي) ويتميز هذا النوع من المصادر بالدقة إلا أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير كما أنها مكلفة من الناحية المادية.

❷ مصادر ثانوية مصادر تاريخية

وهي المصادر التي يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزي للتعبئة والإحصاء، الإنترنت، وسائل الإعلام.

ويتميز هذا النوع من المصادر بتوفير الوقت والجهد والمال.

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعاً للهدف وحجم المجتمع الإحصائي محل البحث. ويعرف المجتمع الإحصائي بأنه جميع المفردات التي يجمعها خصائص عامة واحدة.



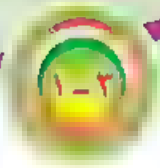
سوف نتعلم

- ☆ أنواع مصادر جمع البيانات.
- ☆ أساليب جمع البيانات.
- ☆ كيفية اختيار عينة.
- ☆ أنواع العينات.

المصطلحات الأساسية

- ☆ مصادر أولية.
- ☆ مصادر ثانوية.
- ☆ أسلوب الحصر الشامل.
- ☆ أسلوب العينات.
- ☆ اختيار متحيز.
- ☆ اختيار عشوائي.
- ☆ عينة.
- ☆ عينة عشوائية.
- ☆ عينة طبقية.





فمثلاً تلاميذ مدرسة معينة تمثل مجتمعاً إحصائياً تكون مفردته التلميذ .

أولاً: أسلوب الحصر الشامل



ويعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائي، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع مثل التعداد العام للسكان. ويتميز هذا الأسلوب بالشمول وعدم التحيز ودقة النتائج. ومن عيوب الحصر الشامل أنه يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة

ثانياً: أسلوب العينات

ويقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الإحصائي الذي تمثله، ونجرى البحث على العينة، وما نحصل عليه من نتائج يتم تعميمه على المجتمع بأكمله.

مزايا أسلوب العينات،

- ١ توفير الوقت والجهد والتكاليف.
- ٢ الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة (مجتمع لأسماك مثلاً)
- ٣ الأسلوب الوحيد لدراسة بعض المجتمعات المحدودة في بعض الأحيان مثل:
 - أ فحص دم مريض من خلال عينة (لان فحص الدم كنه يؤدي إلى الوفاة)
 - ب فحص إنتاج مصنع للمصابيح الكهربائية من خلال عينة لتحديد عمر المصباح.
 - ج معرفة العمر الرسمى للمصباح الكهربى يقتضى إشعاله حتى احتراقه).



ومن عيوب أسلوب العينات عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لاتمثل المجتمع تمثيلاً جيداً (صادقاً)، وتسمى **بالعينة المتحيزة**.

كيفية اختيار العينات والشروط الواجب توافرها في العينة:

أولاً: الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية)



وهو اختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث، وتعرف بالعينة العمدية، فمثلاً عند دراسة مدى استيعاب التلاميذ لموضوع ما في مادة الرياضيات، يجب أن نحلل نتائج الاختبار في ذلك الموضوع لتلاميذ سبق لهم دراسة الموضوع نفسه دون سائر التلاميذ، ولا يعتبر هذا الاختيار عشوائياً.

ثانياً: الاختيار العشوائي (العينات العشوائية)

وهو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع فيها متساوية.

ومن أهم أنواع العينات العشوائية:

١) العينة العشوائية البسيطة:

هى أبسط أنواع العينات، ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة، ويتوقف اختيارها على حجم، وعدد وحدات المجتمع.

٢) إذا كان حجم المجتمع صغيراً:




عند اختيار عينة من خمسة تلاميذ من فصل ٤٠ تلميذاً فإنه يمكن إعداد بطاقة لكل تلميذ يكتب عليها اسمه (أو رقمه)، بحيث تكون البطاقات كلها متماثلة، ثم توضع فى صندوق، وتسحب بطاقة من الصندوق عشوائياً، ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق. وتكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة.

٣) إذا كان حجم المجتمع كبيراً:



بفرض أنه يراد اختيار العينة (٥ تلاميذ) من بين تلاميذ المدرسة كلها والبالغ عددهم ٨٠٠ تلميذ، فتكون عملية الاختيار عن طريق البطاقات عملياً شاقة؛ فيتم ترقيم أسماء التلاميذ من ١ إلى ٨٠٠، ثم استخدام الآلة الحاسبة (أو برنامج EXCEL) فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩، ومع إهمال العلامة العشرية ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩، ويمكن تجاهل الأرقام العشوائية التى تزيد على ٨٠٠ كما يلي:



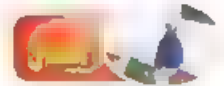
ومع تكرار الضغط على مفتاح  تتوالى ظهور الأرقام ويكتفى بخمسة أرقام غير متكررة لتعطى أرقام تلاميذ العينة.

٧ العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس، أي يتكون من مجموعات نوعية تختلف في الصفات، فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعاً للصفات المكونة له، وتسمى كل مجموعة بطبقة، ويختار الباحث عينة عشوائية تمتثل فيها كل طبقة بحسب حجمها في المجتمع، وتعرف بالعينة الطبقية.



مثال عند دراسة المستوى التعليمي لمجتمع ما مكون من ٤٠٠ شخص بحيث تكون نسبة الذكور إلى الإناث ٣ : ٢، وأردنا اختيار عينة من ٥٠ شخصاً؛ فلاند أن نختار ٣٠ شخصاً من طبقة الذكور، ٢٠ شخصاً من طبقة الإناث، بطريقة عشوائية.



مصنع به ٥٠٠ عامل ويريد المسئولون عن المصنع معرفة آراء العاملين في نظام ساعات الإضافي من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يُعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالي عدد العاملين بهذا المصنع، وضح كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة

الحل

١- عدد العاملين بالمصنع = ٥٠٠ عامل

٢- عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠} \times ٥٠٠ = ٥٠$ عاملاً

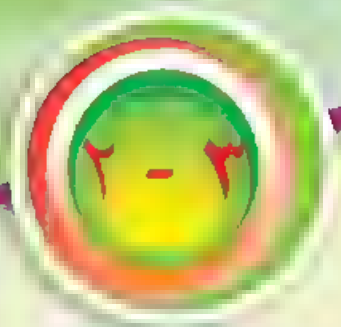
أي أننا نريد اختيار ٥٠ عاملاً لإجراء هذا الاستبيان ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كما يلي :

١- يعطى كل عامل من العاملين بالمصنع رقماً من ١ إلى ٥٠٠

٢- تستخدم الآلة الحاسبة العممية لاختيار ٥٠ رقماً بالطريقة السابق ذكرها والتي تنحصر بين ١ - ٥٠٠

والأرقام العشوائية التي تظهر اكبر من ٥٠٠ يتم استبعادها.

ناقش معلمك في الحل



البيانات

مكرر ناقش

سبق لك دراسة مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المود) وأمكنك حسابها لأي مجموعة من البيانات لتعيين قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات في التمرکز حول هذه القيمة.



فإذا كان الأجر الأسبوعي بالجنهيات لمجموعتين من العمال أ، ب في أحد المصانع كما يلي.

مجموعة أ: ١٧٠، ١٨٠، ١٨٠، ٢٣٠، ٢٤٠
مجموعة ب: ٥٠، ١٨٠، ١٨٠، ١٩٠، ٤٠٠

١ أوجد الوسط الحسابي لأجور كل من المجموعتين أ، ب.

٢ فارق بين أجور المجموعتين أ، ب. ماذا تستنتج؟

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

فيكون:

$$\text{الوسط الحسابي لأجور المجموعة أ} = \frac{٢٤٠ + ٢٣٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٧٠}{٥}$$

$$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠ \text{ جنيه}$$

$$\text{الوسط الحسابي لأجور المجموعة ب} = \frac{٤٠٠ + ١٩٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٥٠}{٥}$$

$$= \frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠ \text{ جنيه}$$

وللمقارنة بين أجور المجموعتين أ، ب نجد أن:

١ الوسط الحسابي لأجور المجموعة أ - الوسط الحسابي لأجور المجموعة ب

$$= ٢٠٠ - ٢٠٠ = ٠$$

٢ الأجر الوسيط = الأجر المنوال = ١٨٠ جنيهًا لكل من المجموعتين أ، ب.

سوف تتعلم

☆ مقاييس التشتت

(المدى - الانحراف

المعياري)

مصطلحات أساسية

☆ نزعة مركزية.

☆ وسط حسابي.

☆ تشتت.

☆ مدى.

☆ انحراف معياري.

وبالخلاصة أن:

- (١) مجموعتي الأجور مختلفتان ولكن لهما نفس مقياس النزعة المركزية.
 (٢) أجور المجموعة أ متقاربة فتتضمن مفرداتها بين ١٧٠، ٢٤٠ جنيهاً، بينما أجور المجموعة ب متباعدة فتتضمن مفرداتها بين ٥٠، ٤١٠ جنيهاً.

أي أن أجور المجموعة ب أكثر تشتتاً من أجور المجموعة أ

لذلك عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم كل من المجموعتين وتباعدها عن بعضهما

التشتت: لأي مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها، ويكون التشتت صغيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً، ويكون التشتت كبيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيراً (أي إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع المفردات.
أي إن التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.

مما سبق نستنتج أنه :

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية وآخر لتشتت لكل مجموعة

مقاييس التشتت**المدى : (أبسط مقاييس التشتت)**

وهو الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها في المجموعة وبمقارنة المجموعتين التاليتين:

المجموعة الأولى: ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٨، ٦٠

المجموعة الثانية: ٤٢، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥٢، ٩٢

نجد أن مدى المجموعة الأولى = ٦٠ - ٥١ = ٩

مدى المجموعة الثانية = ٩٢ - ٤٢ = ٥٠

وعلى هذا نعتبر المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من المجموعة الأولى.

لاحظ أن:

- (١) المدى هو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت.
 (٢) يتأثر المدى تأثراً كبيراً بالقيم المتطرفة.
 فمن الواضح أن مفردات المجموعة الثانية تشتت في مدى ٥٠، وعند استبعاد المفردة الأخيرة (٩٢) منها فإن المدى = ٥٢ - ٤٢ = ١٠ أي $\frac{1}{9}$ المدى السابق حسابه.

(٣) نظرًا لعدم تأثر المدى بأى مفردة فى المجموعة عدا المفردتين الكبرى والصغرى، فقد لا يعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.

٦ الانحراف المعياري:

أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها (تحت ظروف خاصة) وهو "الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى".
أى أن:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

حيث ترمز: σ (سيجما) إلى الانحراف المعياري لمجتمع البيانات.
 \bar{x} (سين بار) إلى الوسط الحسابى لمفردات المجتمع.
 n إلى عدد المفردات.

\sum إلى عملية الجمع.

أولاً: حساب الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات:



احسب الانحراف المعياري للقيم الآتية: ٢١، ١٨، ١٦، ١٣، ١٢
الحل

لحساب الانحراف المعياري نكوّن الجدول المقابل حيث:

الوسط الحسابى $\bar{x} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$16 = \frac{80}{5} = \frac{21 + 18 + 16 + 13 + 12}{5} = \bar{x}$$

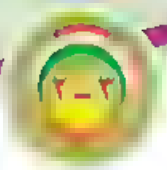
$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{52}{5}} = 10.87 \approx 3.286$$

س	س - \bar{x}	(س - \bar{x}) ^٢
١٢	١٢ - ١٦ = -٤	١٦
١٣	١٣ - ١٦ = -٣	٩
١٦	١٦ - ١٦ = ٠	صفر
١٨	١٨ - ١٦ = ٢	٤
٢١	٢١ - ١٦ = ٥	٢٥

٥٤

٨٠ مجموع



ثانيًا: حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري:

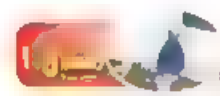
لأي توزيع تكراري، يكون:

$$\frac{\sum (s - \bar{s})^2 \cdot k}{\sum k} = \sigma^2$$

الانحراف المعياري σ

حيث s تمثل القيمة أو مركز المجموعة . k تكرار القيمة أو المجموعة

مجموع التكرارات $\sum k$ الوسط الحسابي $\bar{s} = \frac{\sum s \cdot k}{\sum k}$



فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠٠ صندوق في الوحدات المصنعة:

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصادق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة.

الحل:

باعتبار عدد الوحدات التالفة (s) وعدد الصادق المناظر لها (k)
لحساب الانحراف المعياري للوحدات التالفة نكوّن الجدول التالي:

ويكون:

عدد الوحدات التالفة (s)	عدد الصادق (k)	$s \times k$	$s - \bar{s}$	$(s - \bar{s})^2$	$(s - \bar{s})^2 \cdot k$
صفر	٣	صفر	٣	٩	٢٧
١	١٦	١٦	٢	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	١	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	صفر	صفر	صفر
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
مجموع		١٠٠	٣		٢٠٤

الوسط الحسابي \bar{s}

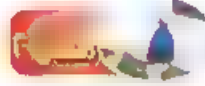
$$\bar{s} = \frac{\sum s \cdot k}{\sum k}$$

$$3 = \frac{300}{100}$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2 \cdot k}{\sum k}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{204}{100}} = \sqrt{2.04} \approx 1.428 \text{ وحدة}$$



التوزيع التكراري الآتي يبين درجات ٤٠ تلميذاً في أحد الاختبارات لإحدى المواد:

المجموعات	-٢٠	-١٦	-١٢	-٨	-٤	٠
التكرار	٢	٥	٨	١٥	١٠	٢٠

أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع.

الحل:

١) نوجد مراكز المجموعات s

فيكون: مركز المجموعة الأولى $= \frac{-٤ + -٢٠}{٢} = -١٢$

مركز المجموعة الثانية $= \frac{-٨ + -٤}{٢} = -٦$

وهكذا ونسجلها في العمود الثالث.

٢) نضرب مراكز المجموعات \times التكرارات المناظرة لها: أي $s \times K$ ونسجلها في العمود الرابع.

نوجد الوسط الحسابي $\bar{s} = \frac{\sum s \times K}{\sum K}$

٣) نوجد انحراف مركز كل مجموعة (s) عن الوسط الحسابي، أي نوجد $(s - \bar{s})$

٤) نوجد مربعات انحرافات مراكز المجموعة عن الوسط الحسابي، أي $(s - \bar{s})^2$

٥) نوجد حاصل ضرب مربع انحراف مركز كل مجموعة عن الوسط الحسابي \times تكرار هذه المجموعة، أي $(s - \bar{s})^2 \times K$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2 \times K}{\sum K}}$$

٦) نحسب الانحراف المعياري σ



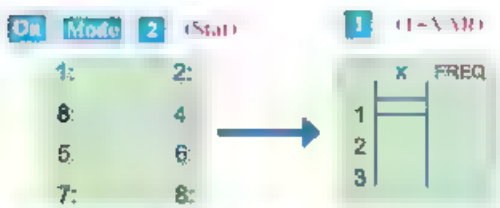
فكوك

المجموعات	التكرار (ك)	مراكز المجموعات (س)	س × ك	س - س	س - س	س - س
٠	٢	٢	٤	١٠,٦٠	١١٢,٢٦	٢٢٤,٧٢
-٤	٥	٦	٣٠	٦,٦	٤٣,٥٦	٢١٧,٨٠
-٨	٨	١٠	٨٠	٢,٦	٦,٧٦	٥٤,٠٨
-١٢	١٥	١٤	٢١٠	١,٤	١,٩٦	٢٩,٤٠
٢٠-١٦	١٠	١٨	١٨٠	٥,٤	٢٩,١٦	٢٩١,٦٠
مجموع			٤٠			٥٧٠,٦

$$\text{الوسط الحسابي } \bar{x} = \frac{504}{40} = 12,6$$

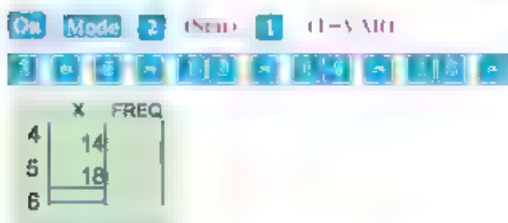
$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{817,6}{40}} = \sqrt{20,44} \approx 4,52 \text{ درجة}$$

يمكن استخدام حاسبة الجيب [Fx-82ES, Fx-83ES, Fx-85ES, Fx-300ES, Fx-350ES] في التحقق من صحة حساب الانحراف المعياري.

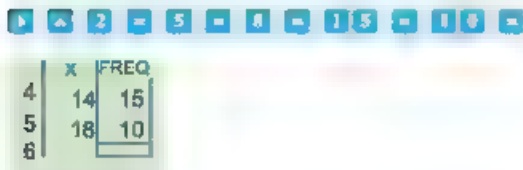


أولاً: تهيئة الحاسبة للنظام الإحصائي والاستعداد لإدخال البيانات

ثانياً: حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري (مثال ٢)



ندخل مراكز المجموعات ١٨، ١٤، ١٠، ٦، ٢



الانتقال إلى بداية العمود الثاني (FREQ) وإدخال التكرار المناظر لكل مجموعة ٥، ٢، ١٠، ١٥، ٨

Shift 1 5 (VAR) 3 X=0 =

x	FREQ
4	18
5	0
6	0

4.521061822

استدعاء الناتج (الانحراف المعياري)

فيكون $\sigma \approx 4,521$

العودة للنظام الأصلي وإغلاق الحاسبة

لاحظ أن:

- (١) يتأثر الانحراف المعياري بانحرافات جميع القيم، وبالتالي تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة.
- (٢) الانحراف المعياري له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية، ولذلك يستخدم في المقارنة بين تشتت المجموعات التي لها نفس وحدات القياس عند تساويها في الوسط الحسابي، وتكون المجموعة الأكبر في الانحراف المعياري هي الأكثر تشتتًا.

الوحدة الرابعة حساب المثلثات

حساب المثلثات



علم حساب المثلثات هو

أحد فروع الرياضيات

والذى يتناول دراسة

العلاقة بين أطوال أضلاع

المثلث وقياسات زواياه، وكان

قدماء المصريين هم أول من عملوا

بقواعد حساب المثلثات فى بناء

الأهرامات، وبناء معابدهم، وفى

دراسة الفلك، وفى حساب

المسافات الجغرافية، كما

قاس البابليون الزوايا

بالدرجات والدقائق

والثواني، وقد قام

البيرونى بعمل جداول

لجيوب الزوايا ثم استنتج

الطوسى أن جيوب الزوايا تتناسب

مع الأضلاع المقابلة لها، ثم تعرف

القرب على ما صاغه علماء العرب

والمسلمون من خلال ترجمة كتب

الفلك العربية على يد العالم

الألماني يوهان مولر.

أبو الريحان البيرونى

عالم ولد فى خوارزم عام

٩٧٣ م وتوفى عام ١٠٤٨ م.

كتاب الطالب: الفصل الدراسى الأول

فكر وامش

فى الشكل، المقابر أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب،
أكمل باستخدام أحد الرموز (< أو > أو =)

١ إذا كان $\angle ق$ و $\angle ج$ فإن أ ب ب ج

٢ $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ ج}{ب ج}$

٣ $\frac{أ ب}{ب ج} + \frac{أ ب}{أ ج} = \frac{أ ب}{ب ج}$

٤ $\frac{أ ب}{أ ج} + \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ ب}{أ ج}$

٥ $\frac{أ ب}{أ ج} + \frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ ب}{أ ج}$

القياس الستيني للزوايا

درسنا أن مجموع قياسات الزوايا
المتجمعة حول نقطة = 360° ، وإذا
قسمت هذه الزوايا إلى أربعة أرباع
متساوية فإن الربع الواحد يحتوى
على 90° (زاوية قائمة)؛ والدرجة
هى وحدة القياس الستيني، كما
توجد أجزاء من الدرجة على النحو
لتالى.

الدرجة = 60 دقيقة ، الدقيقة = 60 ثانية

36 درجة ، 24 دقيقة ، 42 ثانية تكتب

كالآتى: $42^\circ 24' 36''$ ويمكن تحويل الدقائق والثواني إلى أجزاء
من الدرجة بإحدى هاتين الطريقتين :



سوف نتعلم

☆ كيفية إيجاد النسب

المثلثية للزاوية الحادة

فى المثلث القائم الزاوية.

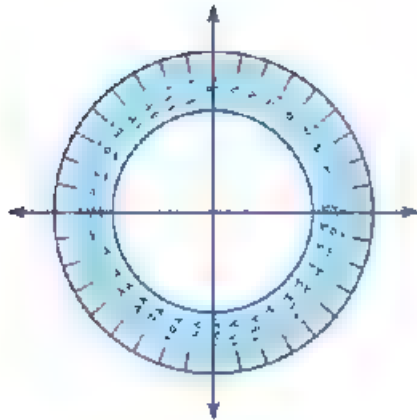
مصطلحات أساسية

☆ قياس ستيني.

☆ جيب زاوية.

☆ جيب تمام زاوية.

☆ ظل زاوية.



أولاً: نحول 24° إلى درجات $24 - \frac{24}{60} = 23,6^\circ$ ، ونحول $42'$ أولاً إلى دقائق ثم إلى درجات.

$$42' = \frac{42}{60} = 0,7^\circ, \quad 23,6 + 0,7 = 24,3^\circ, \quad 24,3^\circ = 24,316667^\circ$$

فيكون الناتج $24,316667^\circ = 24,316667 + 0,4 + 30 = 30,716667^\circ$

ثانياً: باستخدام الآلة الحاسبة على النحو التالي:

$$30,716667^\circ \quad 24 \quad 42 \quad \Rightarrow \quad 30,716667^\circ$$

وبالمثل يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق وثوان.

مثلاً: $54,36^\circ$ يمكن تحويلها إلى درجات ودقائق وثوان باستخدام المفاتيح التالية:

$$54,36^\circ \quad \Rightarrow \quad 54 \quad 21 \quad 36 \quad \Rightarrow \quad 54,36^\circ$$



١ اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات:

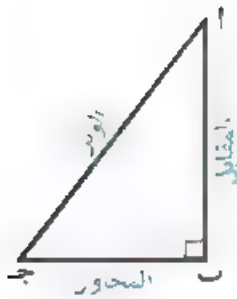
$$71,16^\circ \quad 45,3^\circ \quad 80,28^\circ \quad 65,26^\circ$$

٢ اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثواني.

$$34,6^\circ \quad 78,08^\circ \quad 56,18^\circ \quad 83,246^\circ$$

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

الشكل المقابل:



يمثل المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب حيث أ، ج راويتان حادتان متتامتان؛ فالضلع المقابل للزاوية ج يسمى بالمقابل، والضلع المجاور للزاوية ج يسمى بالمجاور، والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر.

وستتعرف الآن على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة؛ وهي:

١ جيب الراوية. ويرمز له بالعربية جأ، وبالإنجليزية \sin .

٢ جيب تمام الزاوية. ويرمز له بالعربية جتا، وبالإنجليزية \cos .

٣ ظل الزاوية. ويرمز له بالعربية ظأ، وبالإنجليزية \tan .

$\frac{\text{ب}}{\text{ا ج}}$	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	=	جا ح
$\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ج}}$	=	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	=	جتا ح
$\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}}$	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	=	ظا ح



١) ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ج، ا ب = ١٣ سم، ب ج = ١٢ سم.

٢) اوجد طول ا ج

٣) اوجد كلاً من: جا، جتا، ظا، جاب، جتاب، ظاب

٤) اثبت ان: جا ا جتاب + جتا ا جاب = ١

٥) اوجد: ١ + ظا^٢ ا

الحل

٢) Δ ا ب ج قائم الزاوية في ج $\therefore (ا ج)^2 = (ا ب)^2 - (ب ج)^2$

$$\therefore (ا ج)^2 = (١٣)^2 - (١٢)^2 = ٢٥ \Rightarrow ا ج = ٥ \text{ سم}$$

٣) ا ج = ٥ سم

٤) الطرف الأيمن = جا ا جتاب + جتا ا جاب = $\frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{١٣}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{٦٠}{١٦٩} + \frac{١٥٦}{١٦٩} = \frac{٢١٦}{١٦٩} = ١$

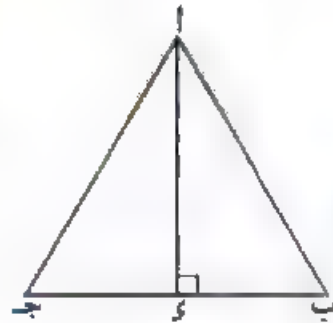
$$١ = \frac{٢٥ + ١٤٤}{١٦٩} = \frac{٢٥}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩} = \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣}$$

$$\frac{١٦٩}{٢٥} = \frac{١٤٤}{٢٥} + ١ = ٢ \left(\frac{١٢}{٥} \right) + ١ = ١ + ٢ \text{ ظا}^2 ا$$

مكرر ٩ ناقش

١ في الشكل المقابل:

أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه ٢، رسم $أ ي \perp ب ج$ أكمل:



(بدلالة ل)

$$١ \text{ و } (أ ب) = \text{ }^\circ$$

$$٢ \text{ و } (أ ب أ ي) = \text{ }^\circ$$

$$٣ \text{ ب ي} = \text{ }^\circ, \text{ أ ي} = \text{ }^\circ$$

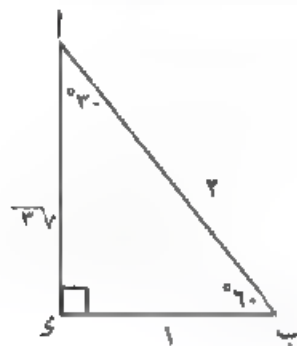
$$٤ \text{ ب ي} : \text{أ ب} : \text{أ ي} = \text{ } : \text{ } : \text{ }$$

نلاحظ مما سبق :

أن $\Delta أ ب ي$ ثلاثيني ستيني، وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

ب ي : أ ب : أ ي = ١ : ٢ : $\sqrt{3}$ وبالتالي يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا

٣٠° ، ٦٠° على النحو التالي :



$$\text{جا } ٣٠^\circ = \frac{ب ي}{أ ب} = \frac{١}{٢}, \text{ جتا } ٣٠^\circ = \frac{أ ي}{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{٢}$$

$$\text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{ب ي}{أ ي} = \frac{١}{\sqrt{3}}, \text{ جتا } ٣٠^\circ = \frac{أ ي}{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{٢}$$

$$\text{جا } ٦٠^\circ = \frac{أ ي}{أ ب} = \frac{\sqrt{3}}{٢}, \text{ جتا } ٦٠^\circ = \frac{ب ي}{أ ب} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ظا } ٦٠^\circ = \frac{أ ي}{ب ي} = \sqrt{3}, \text{ جتا } ٦٠^\circ = \frac{ب ي}{أ ب} = \frac{١}{٢}$$

سوف نتعلم

☆ كيفية إيجاد النسب

المثلثية للزوايا.

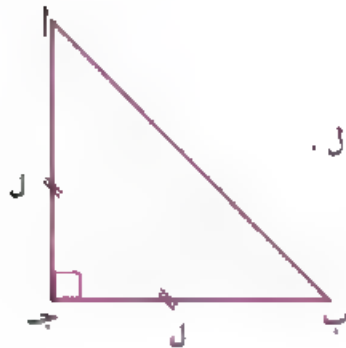
☆ $(٣٠^\circ, ٤٥^\circ, ٦٠^\circ)$

مصطلحات أساسية

☆ نسبة مثلثية.

☆ زاوية خاصة.

مكرر ٩ مامش



١ في الشكل المقابل :

ا ب ج مثلث متساوي الساقين، وقائم الزاوية في ج، وطول كل من ساقيه ل .

أكمل :

٢ و (ا) = ، و (ب) = :

٣ $\therefore (ا) = (ب) = ٢٧^\circ + ٢٧^\circ = ٥٤^\circ$ ، $\therefore (ب) = ٢٧^\circ + ٢٧^\circ = ٥٤^\circ$:

٤ $\therefore (ا) = ٢٧^\circ$ ، $\therefore (ب) = ٢٧^\circ$:

٥ ا ج : ب ج : ا ب = : : :

لثلاثة منها سبق :

أن Δ ا ب ج فيه و (ا) = و (ب) = ٤٥° وأن النسب بين أطوال أضلاع المثلث

ا ج : ب ج : ا ب = ١ : ١ : $٢\sqrt{٢}$ وبالتالي يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية ٤٥° كالآتي :

جا $٤٥^\circ = \frac{ا ج}{ا ب} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ، جتا $٤٥^\circ = \frac{ب ج}{ا ب} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ، ظا $٤٥^\circ = \frac{ا ج}{ب ج} = ١$

ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة في جدول كالآتي

و الزاوية	النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	

ملفوظات :

١ مما سبق نحدد أن: (جيب) أي زاوية يساوي (جيب تمام) الزاوية المتممة لهذه الزاوية، والعكس صحيح.

معملاً: ج۳۰ = ج۶۰، ج۶۰ = ج۳۰، ج۳۰ = ج۶۰، ج۴۵ = ج۴۵

❁ لأي زاوية أيكون: $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$



أوجد قيمة كل من :

جنا ۶۰ جا ۳۰ ۶۰ ظا ۶۰ + جنا ۳۰

$$\frac{\text{حتا}^{\circ} 60 + \text{جتا}^{\circ} 30 + \text{ظا}^{\circ} 40}{\text{جا}^{\circ} 60 \text{ ظا}^{\circ} 60 \text{ جا}^{\circ} 30}$$

امتل

١٠ جتا ١٠ جا ٣٠ - ١٠ جي ١٠ ظا ١٠ + جتا ٢٠ ٣٠

$$\frac{1}{r} = \frac{r}{x} + \frac{r}{y} - \frac{1}{z} \quad \left(\frac{r}{y} \right) + r \times \frac{r}{y} - \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{4}} = \frac{r(1) + r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + r\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20^\circ \text{ ظا} + 30^\circ \text{ جتا} + 60^\circ \text{ جتا}}{60^\circ \text{ ج} - 60^\circ \text{ ظا}} = \text{المقدار}$$



برہن علی صحتہ کل مما یأتی:

$$\text{خط جاذب } 30^\circ = 0 \text{ جاذب } 60^\circ - \text{خط } 20^\circ$$

$$\text{ظ}^{\circ} 60 - \text{ظ}^{\circ} 30 = (1 + \text{ظ}^{\circ} 60 - \text{ظ}^{\circ} 30) \div \text{جتا}^{\circ} 30$$



أوجد النسب المثلثية التالية :

جا 43° ، جتا $28^\circ 53'$ ، ظا $49^\circ 37' 64''$

مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل :

ابداً $\rightarrow \sin 43 = 0,6820 \approx \text{جا } 43^\circ$

ابداً $\rightarrow \cos 28 \cdot 53 \cdot 000 = 0,0953 \approx \text{جتا } 28^\circ 53'$

ابداً $\rightarrow \tan 64 \cdot 37 \cdot 000 = 2,1089 \approx \text{ظا } 64^\circ 37' 64''$

إيجاد الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها

سبق أن درست أنه إذا علمت زاوية فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لها.

معملاً: إذا كانت الزاوية قياسها 30° فإن جا $30^\circ = \frac{1}{2}$ وكذلك إذا

كانت الزاوية قياسها 33° فإن جا $33^\circ = 0,544639035$

$$\sin 33 = 0,544639035$$

والآن نريد معرفة الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها.

معملاً: إذا كان جا $s = 0,544639035$ والمطلوب معرفة قيمة s .

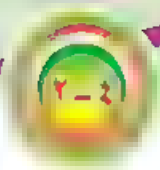
فإننا نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي:

ابداً $\rightarrow \sin^{-1} 0,544639035 = 33^\circ$



أوجد \sin^{-1} (هـ) في كل مما يأتي :

جا هـ = $0,6$ ، جتا هـ = $0,6217$ ، ظا هـ = $1,0823$



الحل

$\sin 0.6 = 0.6$

$\therefore \angle = 36^\circ 52' 12''$

$\therefore \angle = 36^\circ$

$\cos 0.6217 = 0.6217$


$\therefore \angle = 51^\circ 23' 20''$

$\therefore \angle = 51.37^\circ$

$\tan 1.0823 = 1.0823$

$\therefore \angle = 47^\circ 15' 48''$

$\therefore \angle = 47.26^\circ$

الربط بالهندسة  أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ ج = ٨ سم ، ب ج = ١٢ سم.

أوجد :

أولاً : \angle (ب)

ثانياً : مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين.

الحل

نرسم أ ي \perp ب ج

\therefore المثلث أ ب ج متساوي الساقين.

\therefore ي منتصف ب ج ويكون ب ي = ج ي = ٦ سم

$\therefore \angle = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 0.75$

وباستخدام الآلة الحاسبة :

$\sin 0.75 = 0.6818$

$\therefore \angle = 41^\circ 24' 30''$

لإيجاد مساحة سطح المثلث نوجد أ ي

$\therefore (أ ي)^2 = (أ ب)^2 - (ب ي)^2$

$\therefore أ ي = \sqrt{72}$

$\therefore (أ ي)^2 = 72 - 36 = 36$

\therefore مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{1}{2} \times ب ج \times أ ي = \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{72}$

(وهو المطلوب أولاً)

(من نظرية فيثاغورث)

(وهو المطلوب ثانياً)

$= 7\sqrt{12} \text{ سم}^2 = 31.75 \text{ سم}^2$

حل آخر للجزء الثاني.

$$\therefore \text{جاء} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \text{جاء} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore 1 = 8 \text{ جاء } (30^\circ, 24^\circ, 41^\circ)$$

وبالتعويض من ١ في هذه العلاقة

$$\text{مساحة المثلث أ ب ج} = \frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ج} \times 1$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث أ ب ج} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times 1 = 48 \text{ سم}^2 \approx 31,75^\circ$$

ويمكن استخدام حاسبة الجيب على النحو التالي:

ابداً → $1 \div 2 \times 12 \times 8 \sin 41^\circ = 48$



أوجد قيمة س التي تحقق س جا 30° جتا 45° = جا 60°

الحل

$$\therefore \text{س جا } 30^\circ \text{ جتا } 45^\circ = \text{جا } 60^\circ$$

$$\therefore \text{س} \times \left(\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\therefore \text{س} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{س} = 2\sqrt{3}$$



أوجد قيمة س التي تحقق ٢ جا س - ظا 60° - ٢ ظا 45° حيث س زاوية حادة

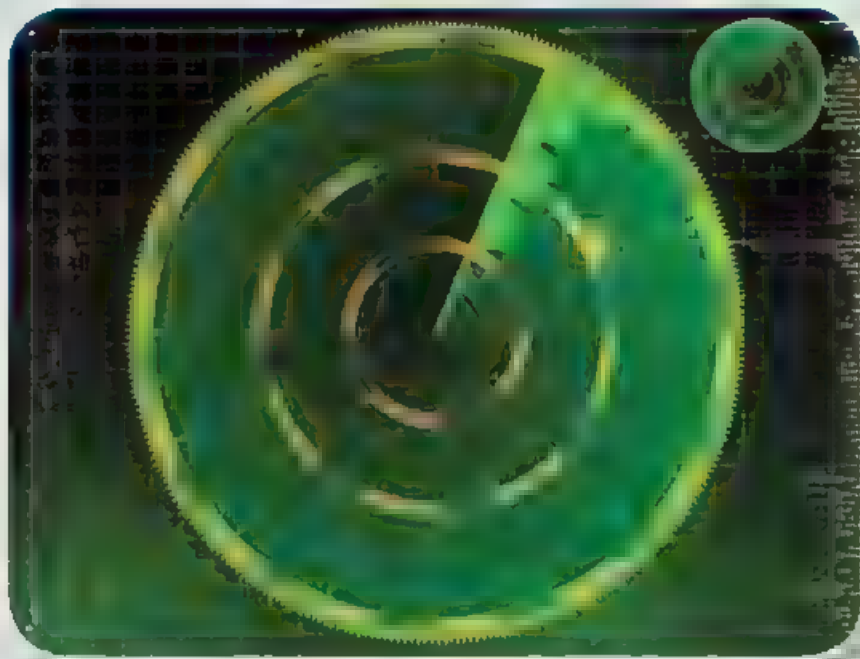
الحل

$$\therefore 2 \text{ جا س} - \text{ظا } 60^\circ - 2 \text{ ظا } 45^\circ = 0$$

$$\therefore 2 \text{ جا س} = 2 \text{ ظا } 45^\circ + \text{ظا } 60^\circ = 2 \times 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{جا س} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{س} = 60^\circ$$



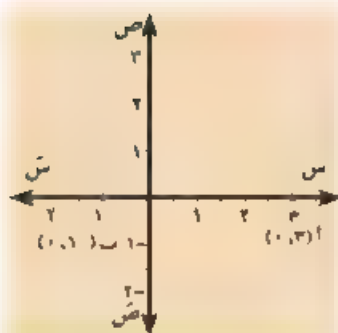
يستخدم الرادار في التعرف على بعد وارتفاع واتجاه و سرعة
الأجسام المتحركة كالطائرات والسفن.
وهوائى الرادار يستقبل الموجات المرتدة، و على شاشة الرادار
يمكن تحديد إحداثيات موقع الهدف (الطائرة - السفن - ...)

مکر و باقش

سابق آر قمت بتمثيل الزوج المرتب على المستوى الإحداثي .
والآن هل يمكنك إيجاد البعد بين أزواج النقاط الآتية :

- ١ (٠، ١) ب (٠، ٣) |
 ٢ ج (١، ٠) د (٣، ٠)
 ٣ م (٢، ٣) ن (٥، ٧)

نلاحظ مما سبق أن :

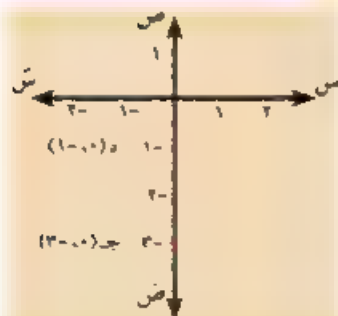


النقطتين $A(0, 3)$ ، $B(-1, 0)$ تقعان على

محور السينات، وبالتالي، فإن :

$| \underline{2} - | = | \underline{2} - \underline{1} - | = \underline{1}$ أ

فيكون $ab = 1$ وحدة طول.



النقطتين جـ $(0, 3)$ ، د $(0, 1)$ تقعا

على محور الصادات، وبالتالي فإن :

$$|(1-) - 2-| = 2-1$$

$$|y_-| = |1 + y_-| =$$

فيكون $d=2$ وحدة طول.

النقطتين م (٣، ٢)، ن (٧، ٥) يمكن

تمثيلهما بيانياً كما في الشكل المقابل.

ولایجاد طول مَن نوجد :

م ك = $|3 - 7| = 4$ وحدة طول،

ن ك = $|2 - 0| = 2$ وحدة طول .

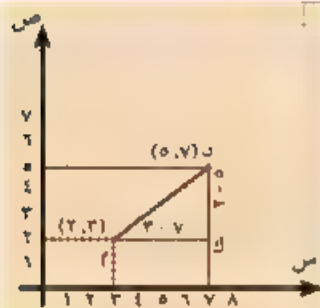
Δ م كن قائم الزاوية في ك

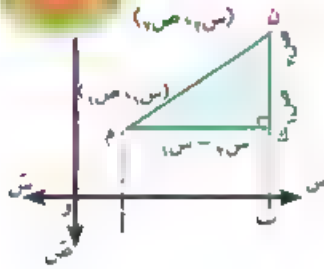
$${}^2(\text{ك ن}) + {}^2(\text{م ك}) = {}^2(\text{ن م}) \therefore$$

(نظریۂ فیثاغورث)

$$16 + 9 = 25 \text{ (م.ج)} \quad 2(4) + 2(2) = 12 \text{ (م.ج)}$$

$\therefore (l \text{ م}) = 20$ وحدة طول





إذا كانت : م (س١, ص١), ن (س٢, ص٢) نقطتين في المستوى الإحداثي

فإن : ك م = |وب - و ا|

$$|س١ - س٢| =$$

$$ك ن = |ن ب - ك ب| = |ص١ - ص٢|$$

∴ ∆ ك م ن قائم الزاوية في ك (نظرية فيثاغورث)

$$∴ م^2 = (ك م)^2 + (ك ن)^2$$

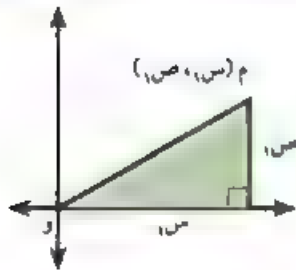
$$= (س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2$$

$$∴ م = \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$$

البعد بين النقطتين (س١, ص١), (س٢, ص٢) = $\sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$

المعد بين نقطتين r مربع فرق السينات - مربع فرق الصادات

ملحظة :



في الشكل المقابل بعد النقطة م (س١, ص١) عن نقطة الأصل و (٠, ٠)

$$وم = \sqrt{س١^2 + ص١^2}$$



أ ب جد شكل رباعي حيث أ (٤, ٢), ب (٠, ٣), جـ (٥, ٧), د (٩, ٢) أثبت أن الشكل أ ب جد مربع.

الحل :

$$\overline{أ ب} = \sqrt{(٤-٠)^2 + (٢-٣)^2} = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$$

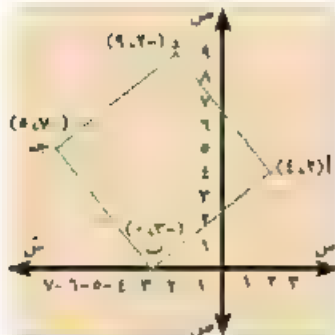
$$\overline{أ ب} = \sqrt{(س١-س٢)^2 + (ص١-ص٢)^2} = \sqrt{(٤-٠)^2 + (٢-٣)^2} = \sqrt{٥}$$

$$\overline{أ جـ} = \sqrt{(٤-٥)^2 + (٢-٧)^2} = \sqrt{١+٢٥} = \sqrt{٢٦}$$

$$\overline{أ جـ} = \sqrt{(س١-س٢)^2 + (ص١-ص٢)^2} = \sqrt{(٤-٥)^2 + (٢-٧)^2} = \sqrt{٢٦}$$

$$\overline{أ د} = \sqrt{(٤-٩)^2 + (٢-٢)^2} = \sqrt{٢٥+٠} = \sqrt{٢٥}$$

$$\overline{أ د} = \sqrt{(س١-س٢)^2 + (ص١-ص٢)^2} = \sqrt{(٤-٩)^2 + (٢-٢)^2} = \sqrt{٢٥}$$



$$\sqrt{41} = \sqrt{(0-)^2 + (4)^2} \quad \text{و أ} = \sqrt{[9-4]^2 + [(2)-2]^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \text{أب} = \text{ب ج} = \text{ج د} = \text{د أ} = \sqrt{41}$$

∴ أب ج د إما أن يكون مربعاً أو معيناً

لأننا أن الشكل أب ج د مربع توجد طولى القطرين أ ج ، ب د

$$\text{أ ج} = \sqrt{[4-0]^2 + [2-2]^2} = \sqrt{16} = 4$$

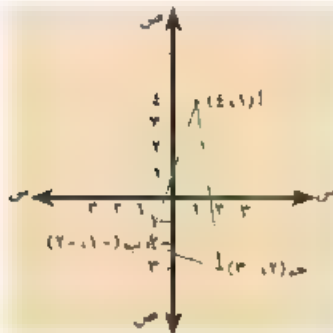
$$\text{ب د} = \sqrt{[2-9]^2 + [(3)-2-1]^2} = \sqrt{82}$$

∴ أ ج = ب د = $\sqrt{82}$ وأضلاع الشكل أب ج د متساوية فى الطول

∴ الشكل أب ج د مربع

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ (4، 1)، ب (2، -1)، ج (3، -2) قائم الزاوية، وأوجد مساحة سطحه

الحل



$$(\text{أ ب})^2 = (4-2)^2 + (1-(-1))^2 = 4 + 4 = 8$$

$$(\text{ب ج})^2 = (2-3)^2 + (-1-(-2))^2 = 1 + 1 = 2$$

$$(\text{أ ج})^2 = (4-3)^2 + (1-(-2))^2 = 1 + 9 = 10$$

$$(\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2 = 8 + 2 = 10 = (\text{أ ج})^2$$

$$\therefore (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2 = (\text{أ ج})^2$$

$$\therefore \angle \text{ب} = 90^\circ \text{ (عكس نظرية فيثاغورث)}$$

$$\therefore \text{م} (\triangle \text{أ ب ج}) = \frac{1}{2} \times \text{أ ب} \times \text{ب ج} = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ وحدة مربعة}$$

أثبت أن النقط أ (3، 1)، ب (6، 4)، ج (2، 2)، تقع على دائرة مركزها النقطة م (2، 1)، ثم أوجد

محيط الدائرة.

الحل

$$\text{أ م} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{ب م} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\text{ج م} = \sqrt{(2-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \text{أ م} = \text{ب م} = \text{ج م} = 1$$

∴ أ، ب، ج تقع على دائرة مركزها م

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi \times \text{نق} = 2\pi \times 1 = 2\pi \text{ وحدة طول}$$

مكر و ناقش

في مستوى إحداثي متعامد: أوجد إحداثيي النقطة ج منتصف القطعة المستقيمة أ ب إذا كان:

أولاً: أ (٦، ٢)، ب (٦، ٦)

ثانياً: أ (٥، -٢)، ب (١، -٢)

ثالثاً: أ (٢، ١)، ب (٦، ٥)

سوف نتعلم

☆ كيفية إيجاد إحداثيي

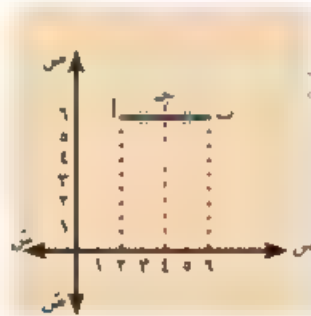
منتصف قطعة مستقيمة.

مصطلحات أساسية

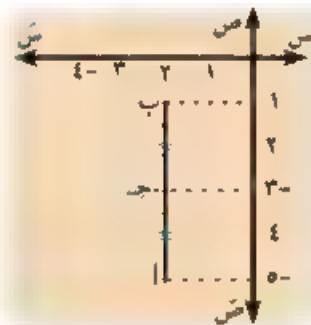
☆ طرفا قطعة مستقيمة.

☆ إحداثيا منتصف قطعة

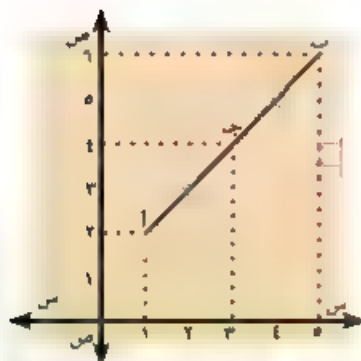
مستقيمة .



أولاً: القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (٦، ٢)، ب (٦، ٦) توازي محور السينات ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هي ج (٦، ٤).



ثانياً: القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (٥، -٢)، ب (١، -٢) توازي محور الصادات، ويكون إحداثيي نقطة منتصفها هي ج (٣، -٢).



ثالثاً في الشكل المقابل:

نفرض أن نقطة ج منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان أ (٢، ١)،

ب (٦، ٥)، ومن الرسم نجد أن

إحداثيي ج هو (٤، ٣).

أي أن ج $(\frac{6+2}{2}, \frac{5+1}{2})$ أي ج (٤، ٣)

وعلى وجه العموم يمكن استنتاج قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة كالآتي

إذا كانت: $A(س_١، ص_١)$ ، $B(س_٢، ص_٢)$ ، $M(س، ص)$ حيث M منتصف AB .

ومن تطابق المثلثين $\triangle MDA$ ، $\triangle MBH$ نجد أن: $AD = BH$

$$\therefore س - س_١ = س - س_٢$$

$$\therefore س_٢ - س_١ = ٢س$$

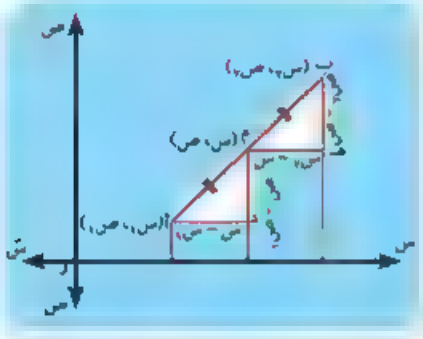
$$\therefore س = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$$

$$\therefore ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

$$M\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}, \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

مثال: إذا كانت J منتصف AB وكان $A(٣، ٥)$ ، $B(٧، -٣)$

فإن إحداثي منتصف AB هي $\left(\frac{٣+٧}{٢}, \frac{٥-٣}{٢}\right)$ أي $(٥، -١)$



إذا كانت $J(٦، -٤)$ هي منتصف AB حيث $A(٥، ٣)$ فأوجد إحداثي نقطة B .

الحل:

نفرض أن $B(س_٢، ص_٢)$ ، $A(٥، ٣)$ ، منتصف AB هي النقطة $J(٦، -٤)$

$$\therefore س = \frac{س_١ + س_٢}{٢}، ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

$$\therefore \frac{٥ + س_٢}{٢} = ٦، \frac{٣ + ص_٢}{٢} = -٤$$

$$\therefore ٥ + س_٢ = ١٢، ٣ + ص_٢ = -٨$$

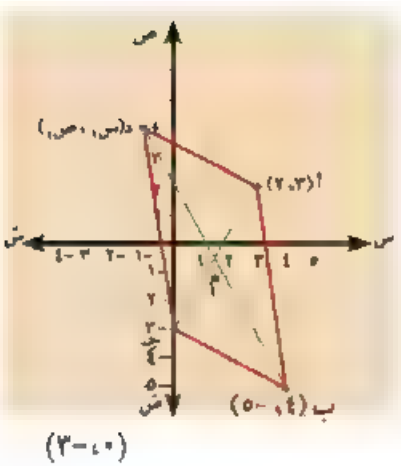
$$\therefore س_٢ = ٧، ص_٢ = -١١$$

$\therefore B(٧، -١١)$



أب جد متوازي أضلاع فيه أ (٢، ٣)، ب (٥، ٤)، جـ (٣، ٠) - أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه، ثم أوجد إحداثيي نقطة د .

الحل :



الشكل أب جد متوازي أضلاع، م نقطة تقاطع قطريه، نفرض د (س، ص)

م منتصف أ جـ

$$\therefore م \left(\frac{3+2}{2}, \frac{0+3}{2} \right)$$

$$\therefore م \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\therefore م \left(\frac{3+0-}{2}, \frac{1س+4}{2} \right)$$

$$\therefore 1س + 4 = 3$$

$$\therefore 1س = 1 -$$

$$\therefore 1 - 0 = 1س$$

$$\therefore 1س = 1 -$$

$$\therefore \text{إحداثيي د } (-1, 1)$$

م منتصف ب د

$$\therefore \frac{1س+4}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{1س+0-}{2} = \frac{1}{2}$$

سبق أن علمت أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (س_١، ص_١)،
(س_٢، ص_٢) يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

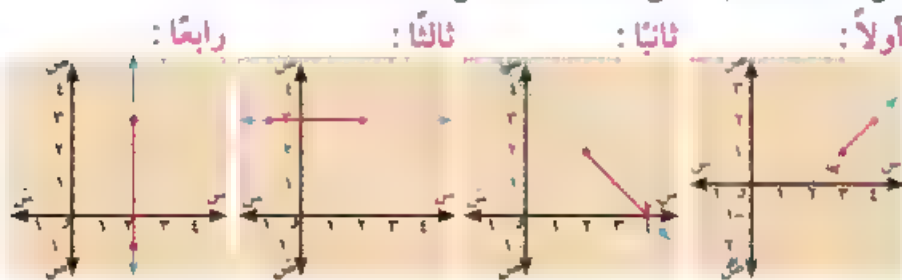
مكرر ناقش

أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من الأزواج المرتبة التالية :

أولاً: (١، ٣)، (٢، ٤) ثانياً: (٠، ٤)، (٢، ٢)
ثالثاً: (٣، ١)، (٣، ٢) رابعاً: (١، ٢)، (٣، ٢)

ماذا تلاحظ ؟

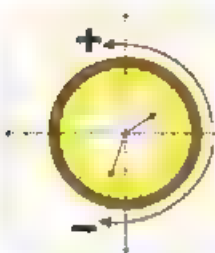
مما سبق يمكن رسم المستقيمات العارة بأزواج النقط السابقة
في المستوى الإحداثي المتعامد كما في الأشكال الآتية :



مصطلحات أساسية

- ☆ قياس موجب للزاوية.
- ☆ قياس سالب للزاوية.
- ☆ ميل خط مستقيم.
- ☆ مستقيمان متوازيان.
- ☆ مستقيمان متعامدان.

القياس الموحد والقياس السالب للزاوية:

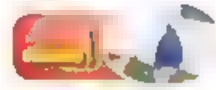
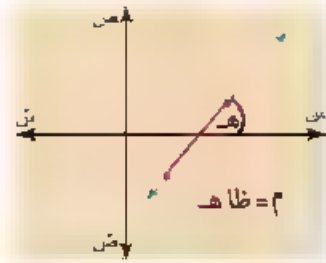


تكون الزاوية موجبة إذا كانت مأخوذة في عكس
اتجاه حركة عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت
مأخوذة في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.
فمن الأشكال السابقة نستنتج أن:

نوع الزاوية الموجبة التي يصنعها مستقيمان	نوع الزاوية السالبة التي يصنعها مستقيمان	الميل $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$	نمط الشكل
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	عكس الاتجاه الموجب لمحور السينات	$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$	أولاً: م
أكبر من الصفر	أصغر من الصفر	$\frac{١ - ٢}{٣ - ٤} = ١$	ثانياً: م
مفرحة	مفرحة	$\frac{١ - ٢}{٤ - ٢} = -١$	ثالثاً: م
يساوي صفر	يساوي صفر	$\frac{٣ - ٣}{١ - ٢} = ٠$	رابعاً: م
غير معروف	غير معروف	$\frac{١ + ٣}{٢ - ٢}$ (غير معرف)	

ووصل إلى تعريف ميل الخط المستقيم

هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؛
أي أن: ميل الخط المستقيم = ظاه
 حيث هـ الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



١ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها $٤٨^\circ ١٣' ٥٦''$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = ١,٤٨٦٥.

الحل

١ $\therefore \text{م} = \text{ظاه} \quad \therefore \text{م} = \text{ظاه} ٤٨^\circ ١٣' ٥٦'' = ١,٤٩٤٥٣٤٤٠٥$

ابداً $\rightarrow \tan 56 \quad 12 \quad 48 \quad =$

٢ $\therefore \text{م} = \text{ظاه} \quad \therefore \text{ظاه} = ١,٤٨٦٥ \quad \therefore \angle \text{هـ} = ٥٦^\circ ١٣' ٥٦''$

ابداً $\rightarrow \tan 1.4865 \quad =$



١ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

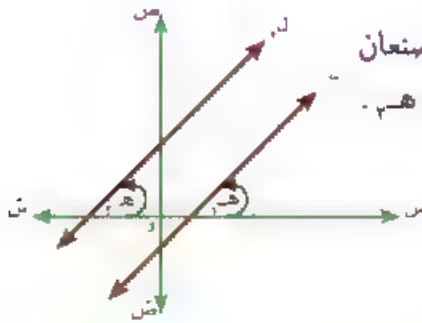
٣٠° ٤٥° ٦٠°

٢ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم الذي ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات في الحالات الآتية :

$٠,٣٦٧٣ = \text{م}$ $١,٠٢٤٦ = \text{م}$ $٣,١٦٤٨ = \text{م}$

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

مكر 9 ناقش



الشكل المقابل : يمثل مستقيمين متوازيين $ل_1$ ، $ل_2$ ميلاهما $1م$ ، $2م$ ، يصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما $1س$ ، $2س$. أكمل ما يأتي :

١) $1س = 2س$ ($1م = 2م$) لأنهما

٢) $1س \neq 2س$ ($1م \neq 2م$)

٣) $1س = 2س$ ($1م \neq 2م$)

مستنتج مما سبق أن :

إذا كان $ل_1 // ل_2$ فإن $1م = 2م$

أي أنه: إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين، وعكس ذلك صحيح.

فإذا كان $1م = 2م$ فإن $ل_1 // ل_2$

أي أن: إذا تساوى ميل مستقيمين كان المستقيمان متوازيين.

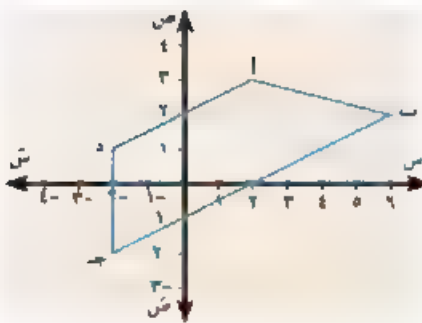


١ أثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-3, 2)$ ، $(4, 5)$ يوازي المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45° .

الحل

$$1 = \frac{y}{x} = \frac{(2) - 5}{(-3) - 4} = \frac{1ص - 2ص}{1س - 3س} = (1م)$$

ميل المستقيم الثاني $(م) = 1 = 45^\circ$ $1م = 2م$ \therefore المستقيمان متوازيان.



٢ مثل بيانياً النقط $أ(2, 3)$ ، $ب(6, 2)$ ، $ج(4, -2)$ ، $د(1, -2)$ ، على المستوى الإحداثي، ثم أثبت أن الشكل $أب ج د$ شبه منحرف.

الحل

من الرسم نجد أن : $\overline{أد} // \overline{بج}$

ولإثبات ذلك تحليلياً نوجد ميل كل من $\overline{أد}$ ، $\overline{بج}$.

ميل \overline{AD} (وليكن m_1)

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1-3}{2+2} = 1 \text{ م.م.}$$

$$\frac{1 \text{ ص} - 2 \text{ ص}}{1 \text{ س} - 2 \text{ س}} = 1 \text{ م.م.}$$

وميل \overline{AB} جـ (وليكن m_2)

$$\frac{1}{2} = 1 \text{ م.م.} \therefore \overline{AD} \parallel \overline{AB} \text{ جـ}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{2+2}{2+6} = 1 \text{ م.م.}$$

الشكل \overline{AB} جـ شبه منحرف ما لم تكن النقطة A ، B ، C على استقامة واحدة (١)

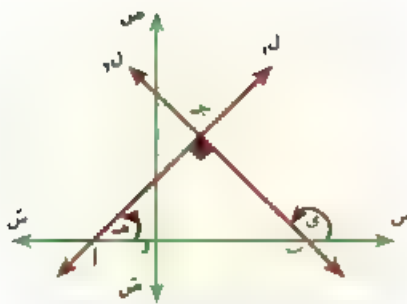
$$\therefore \text{ميل } \overline{AB} = \frac{2-3}{4-2} = \frac{1}{2} \text{ ميل جـ} = \frac{1+2}{2+2} \text{ (عبر معرف)}$$

المستقيمان غير متوازيين (٢)

من (١)، (٢) \therefore الشكل \overline{AB} جـ شبه منحرف.

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

مفكر ٩ ناقش



الشكل المقابل: يمثل المستقيمين l_1 ، l_2 الذي ميلهما m_1 ، m_2

حيث $l_1 \perp l_2$.

أوجد العلاقة بين m_1 و m_2 (هـ)، و m_1 و m_2 (ي)

ثم أكمل الجدول الآتي باستخدام حاسبة الجيب:



قيم هـ	m_1	m_2	قيم ي
قيم ي	m_1	m_2	m_1
ظاهـ \times ظاي	m_1	m_2	m_1

من الجدول السابق نجد أن:

ظاهـ \times ظاي $= 1$ أي أن: $m_1 \times m_2 = 1$

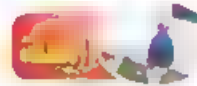
l_1 ، l_2 مستقيمان ميلهما m_1 ، m_2 حيث $m_1 \times m_2 = 1$ \exists حـ

إذا كان $l_1 \perp l_2$ **فإن** $m_1 \times m_2 = -1$

أي أن: حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين $= -1$

وعكس ذلك صحيح: **فإذا كان** $m_1 \times m_2 = -1$ **فإن** $l_1 \perp l_2$

أي أن إذا كان حاصل ضرب ميلي مستقيمين $= -1$ فإن المستقيمين يكونان متعامدين.



١ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(372, 5)$ ، $(373, 4)$ عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 30° .

الحل

نفرض أن ميل المستقيم الأول m_1 وميل المستقيم الثانى m_2 .

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = 0 \quad \therefore \frac{4 - 5}{1 + m_1 \cdot 372} = 0$$

$$\therefore m_2 = m_1 = 0 \quad \text{ظاهراً}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \quad \therefore \frac{1}{372} \times 372 = -1 \quad \therefore \text{المستقيمان متعامدان.}$$

٢ إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص $(2, 4)$ ، س $(5, 3)$ ، ع $(1, 5)$ قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة \angle .

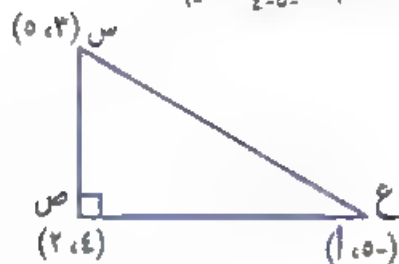
الحل

$$\text{نوجد ميل س ص فيكون } m_{SV} = \frac{3-4}{5-2} = -\frac{1}{3}, \text{ نجد ميل ص ع فيكون } m_{SE} = \frac{5-4}{1-2} = -1$$

$$\therefore \Delta \text{ س ص ع قائم الزاوية فى ص} \quad \therefore m_{SV} \times m_{SE} = -1$$

$$\therefore -1 = \frac{3-4}{5-2} \times m_{SE} \quad \therefore -1 = \frac{1}{3} \times m_{SE}$$

$$\therefore m_{SE} = -3 \quad \therefore 5-4 = -3(1-2) \quad \therefore 1 = -3(-1)$$





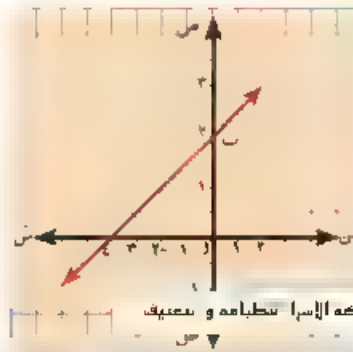
سوف تتعلم

- ☆ كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات.

مصطلحات أساسية

- ☆ معادلة خط مستقيم.
- ☆ ميل خط مستقيم.
- ☆ جزء مقطوع من محور الصادات.

سبق أن درست العلاقة الخطية بين المتغيرين س، ص وهي :
 $أس + ب ص + ج = ٠$ حيث أ، ب (كلاهما $\neq ٠$)
 وتمثيلها بيانيًا بخط مستقيم .



مثل العلاقة : س - ٢ص + ٤ = ٠ بيانيًا .
 ومن الشكل البياني احسب .
 ميل الخط المستقيم .

طول الجزء الرأسى المحصور بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .

لسهولة الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع المحورين كالآتي :

$$\text{بوضع ص} = ٠ \quad \text{س} = ٤ + ٠ = ٤$$

$$\text{س} = -٤ \quad (٠, -٤) \quad \text{بحقق العلاقة}$$

$$\text{بوضع س} = ٠ \quad ٠ = ٤ - ٢ص \quad \text{س} = ٤ + ٠ = ٤$$

$$\text{ص} = ٢ \quad (٢, ٠) \quad \text{بحقق العلاقة}$$

من الرسم نجد أن : ميل الخط المستقيم (م) < ٠ (لماذا؟)

$$\text{فيكون م} = \frac{\text{الجزء الرأسى المحصور}}{\text{الجزء الأفقى المحصور}} = \frac{-٤}{٤} = -١$$

يسمى البعد المحصور بين النقطتين و، ب بالجزء المقطوع من محور الصادات ويرمز له بالرمز (ج) و طوله يساوى ٢ وحدة طول .

ويمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة : ص = م س + ج

$$\text{فيكون } ٢ص = س + ٤ \text{ وبقسمة الطرفين على } ٢ \quad \text{ص} = \frac{١}{٢} س + ٢$$

وبلاحظ من هذه الصورة أن : ميل الخط المستقيم (م) هو معامل س

ويساوى ١، وأن طول الجزء المقطوع من محور الصادات ج = ٢ وهي

نفس النتائج التى حصلنا عليها من الرسم السابق .

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (ج) على الصورة:

$$ص = م س + ج \quad \text{حيث } م, ج \in \mathbb{R}$$

لاحظنا ان: يمكن وضع معادلة الخط المستقيم $ص = م س + ج$ ب ص = صفر، ب $\neq 0$.

على الصورة: $ص = م س + ج$ كالآتي:

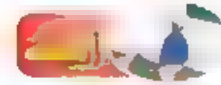
$$ص = م س + ج \quad \text{فيكون } ب ص = - أ س - ج$$

$$\therefore ص = - \frac{أ}{ب} س - \frac{ج}{ب}$$

وهي على الصورة: $ص = م س + ج$

$$\text{حيث } م = - \frac{أ}{ب} = - \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

ج هو طول الجزء المقطوع من محور الصادات.



أوجد ميل الخط المستقيم $ص = ٣ س + ٤ ص - ٥ = ٥$ صفر بطريقتين

ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

الحل

معادلة الخط المستقيم على الصورة $ص = م س + ج$ ، ب $\neq 0$.

$$\therefore \text{ميل المستقيم} = \frac{أ}{ب} \quad \therefore \text{ميل المستقيم} = \frac{٣-}{٤-}$$

أو يمكن وضع معادلة الخط المستقيم على الصورة $ص = م س + ج$

$$\therefore ٤ ص - ٥ = ٣ س + ٥$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم} = \frac{٣-}{٤-} \quad \therefore ٥ = \frac{٣-}{٤-} س + ٥$$

$$\therefore \text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات} = \frac{٥-}{٤-}$$

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ١) وعمودي على الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (٢، ٣)، ب (٥، ٤).

الحل

$$\therefore \text{ميل المستقيم المار بالنقطتين أ، ب} = \frac{٣-}{٢-} = \frac{٤-}{٥-} = \frac{٣+٤-}{٢-٥-} = \frac{١-}{٣-} \quad \therefore \text{فيكون ميل المستقيم العمودي عليه} = ٣$$

معادلة المستقيم تكون على الصورة: $ص = ٣ س + ج$

المستقيم يمر بالنقطة (٢، ١) فهي تحقق معادلته.

$$\therefore ١ = ٣ \times ٢ + ج \quad \therefore ج = ١ - ٦ = -٥$$

معادلة المستقيم تكون على الصورة: $ص = ٣ س - ٥$

إذا كانت أ (٤، ٣)، ب (١، ٥)، ج (٥، ٣) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالرأس أ ويصف ب حـ.

الحل

$$\text{نقطة منتصف ب ج} = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{8}{2} \right) = (3, 4)$$

$$\therefore \text{ميل الخط المستقيم المطلوب} = \frac{4-3}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\therefore \text{ص} = \text{م} + \text{ج} \quad \therefore \text{ص} = \frac{1}{-1} + \text{ج}$$

\therefore المستقيم يمر بالنقطة أ (٤، ٣) فهي تحقق معادلته

$$\therefore \frac{3}{-1} = 4 + \text{ج} \quad \therefore \frac{3}{-1} = 4 + \frac{1}{-1} \quad \therefore \frac{3}{-1} = 4 - \frac{1}{1}$$

\therefore معادلة الخط المستقيم تكون على الصورة: $\text{ص} = \frac{1}{-1} + \text{ج}$ وبضرب طرفي المعادلة في ١

$$\therefore \text{ص} = -1 + \text{ج} \quad \text{أي المعادلة هي: } \text{ص} - \text{ج} = -1$$



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم العالي
الإدارة المركزية للكتب

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

الصف الثالث الإعدادي

تأليف

الأستاذ / عمر فؤاد جاب الله

الدكتور / عصام وصفي روفائيل

لأستاذ الدكتور / عفاف أبو الفتوح صالح

الأستاذ / كمال يونس كبشة

لأستاذ / سيرافيم إلياس إسكندر

مراجعة

الأستاذ / سمير محمد سعداوي

الأسناد / فتحي أحمد شحاتة

مراجعة علمية

أ / جمال الشاهد

مستشار الرياضيات

تحرير وإخراج مركز تطوير المناهج

طبعة ٢٠٢٢ ٢٠٢٣

المحتويات

لحبر

لوحة لاولى لمعادلات

- (١-١) حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين جبريًا وبيانيًا ٣
(٢-١) حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانيًا وجبريًا ٨
(٣-١) حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية ١١

لوحة لتبسيط لدول تكسريد والعمليات عليها

- (١-٢) مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود ١٣
(٢-٢) الدالة الكسرية الجبرية ١٥
(٣-٢) تساوي كسرين جبريين ١٧
(٤-٢) العمليات على الكسور الجبرية ٢٠

الاحتمال

لوحة لتبسيط الاحتمال

- (١-٣) العمليات على الأحداث ٢٦
(٢-٣) الحدث المكمل، والفرق بين حدثين ٣١

الهندسة

لوحة للرباعية

- (١-٤) تعاريف ومفاهيم أساسية ٣٥
(٢-٤) أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة ٤٢
(٣-٤) تعيين الدائرة ٥٠
(٤-٤) علاقة أوتار الدائرة بمركزها ٥٣

لوحة للخمسة الروابي والأقوس في لدنره

- (١-٥) الزاوية المركزية وقياس الأقواس ٥٩
(٢-٥) العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين في القوس ٦٦
(٣-٥) الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس ٧٤
(٤-٥) الشكل الرباعي الدائري ٧٩
(٥-٥) خواص الشكل الرباعي الدائري ٨٣
(٦-٥) العلاقة بين مماسات الدائرة ٨٧
(٧-٥) الزاوية المماسية ٩٢

الرموز الرياضية المستخدمة

الرمز	يُقرأ	الرمز	يُقرأ
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	\perp	عمودي على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازي
ن	مجموعة الأعداد النسبية	\overline{ab}	القطعة المستقيمة ab
\dot{N}	مجموعة الأعداد غير النسبية	\overleftarrow{ab}	الشعاع ab
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	\overleftrightarrow{ab}	المستقيم ab
$\sqrt[n]{}$	الجذر التربيعي للعدد a	$\angle (a)$	قياس زاوية a
$\sqrt[n]{}$	الجذر التكعيبي للعدد a	$\widehat{(ab)}$	قياس القوس ab
$[a, b]$	فترة مغلقة	\sim	تشابه
$]a, b[$	فترة مفتوحة	$<$	أكبر من
$[a, b[$	فترة نصف مفتوحة	\leq	أكبر من أو تساوي
$]a, b]$	فترة نصف مفتوحة	$>$	أقل من
$[a, \infty[$	فترة غير محدودة	\geq	أقل من أو تساوي
$=$	تطابق	$P(a)$	احتمال وقوع الحدث a
$n(a)$	عدد عناصر الحدث a	\bar{x}	الوسط الحسابي
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف المعياري
		Σ أو \sum	المجموع

الجبر

المعادلات

الدوال الكسرية والعلاقات عينا



قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.
هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

الوحدة الأولى

المعادلات

متغيرين جبريا وبيانيا

مكرر ٩ ناقس



سواء تعلم

☆ كيفية حل معادلتين
من الدرجة الأولى في
متغيرين.



مستطيل محيطه ٣٠ سم ما هي القيم الممكنة لطوله وعرضه
إذا كان طول المستطيل = س سم،
عرض المستطيل = ص سم
فإن: الطول + العرض = $\frac{1}{2}$ المحيط
٠. س + ص = ١٥

مصطلحات أساسية

- ☆ معادلة من الدرجة الأولى
- ☆ حل بيانى.
- ☆ حل جبرى.
- ☆ مجموعة التعويض.
- ☆ مجموعة الحل.

- تسمى هذه المعادلة معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين .
- حل هذه المعادلة يعنى إيجاد زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يحقق المعادلة.

هل يمكن أن يكون (٢٠، ٥) حلا للمعادلة السابقة.

ترك لك عزيزى الطالب الإجابة على هذا السؤال بعد عرض الآتى:

- يمكن حل المعادلة بوضعها على إحدى الصورتين.

$$\textcircled{١} \text{ ص} = ١٥ - \text{س} \quad \text{أو} \quad \textcircled{٢} \text{ س} = ١٥ - \text{ص}$$

وبإعطاء أحد المتغيرين أى قيمة يمكن حساب قيمة المتغير الآخر.
فإذا كان س \in ح فإن مجموعة التعويض هي ح \times ح ويكون للمعادلة
الدرجة الأولى عدد غير منته من الحلول التى كل منها على صورة زوج مرتب
(س، ص) حيث مسقطه الأول س ومسقطه الثانى ص.

$$\text{عند س} = ٨ \quad \therefore \text{ص} = ١٥ - ٨ = ٧ \quad \therefore (٧, ٨) \text{ حل للمعادلة}$$

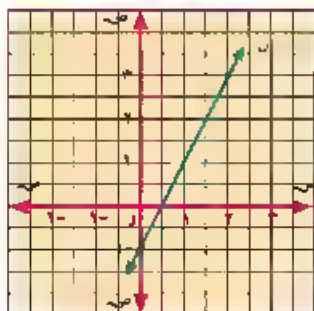
$$\text{عند س} = ٩,٥ \quad \therefore \text{ص} = ١٥ - ٩,٥ = ٥,٥ \quad \therefore (٥, ٥, ٩, ٥) \text{ حل للمعادلة}$$

$$\text{عند س} = \sqrt{٧٤} \quad \therefore \text{ص} = ١٥ - \sqrt{٧٤} \quad \therefore (\sqrt{٧٤}, ٤) \text{ حل للمعادلة}$$

أولا حل معادلات من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيا



أوجد مجموعة حل المعادلة ٢س - ص = ١



الحل

نكتب المعادلة في الصورة $ص = ١ - س$

بوضع $س = ٠$ ، $ص = ١$ ، $(٠, ١)$ حل للمعادلة

بوضع $س = ١$ ، $ص = ٠$ ، $(١, ٠)$ حل للمعادلة

وبرسم المستقيم ل المار بالمقتطين الممثلين للزوجين المرتبين $(٠, ١)$ ، $(١, ٠)$ ، $(٣, ٣)$ ،

تجد أن كل نقطة \in ل تمثل حلاً للمعادلة

أي أن للمعادلة $س - ص = ١$ عدد غير منته من الحلول.

اذكر أربعة حلول أخرى لهذه المعادلة.

٢ أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين بيانياً .

$$ل١ : ص = ٢س - ٣ ، ل٢ : ص = ٣ + س$$

الحل

في المعادلة $س - ص = ٣$

بوضع $س = ٠$ ، $ص = -٣$ ، $(٠, -٣)$ حل للمعادلة

بوضع $س = ٤$ ، $ص = ١$ ، $(٤, ١)$ حل للمعادلة

فيكون ل١ في الشكل المقابل يمثل مجموعة الحل للمعادلة (١)

نضع المعادلة $س + ص = ٤$ على الصورة $ص = ٤ - س$

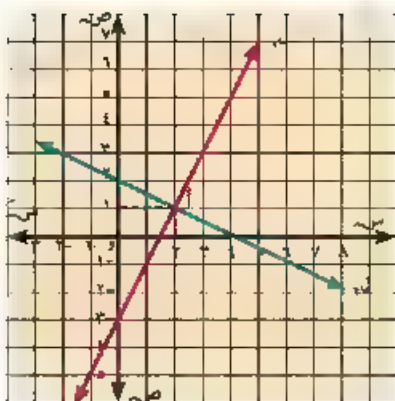
بوضع $س = ٠$ ، $ص = ٤$ ، $(٠, ٤)$ حل للمعادلة

وبوضع $س = ١$ ، $ص = ٣$ ، $(١, ٣)$ حل للمعادلة

فيكون ل٢ في الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المعادلة (٢)

في الشكل ل١ ، ل٢ يتقاطعان في النقطة $(١, ٣)$

∴ مجموعة حل المعادلتين هي $\{(١, ٣)\}$

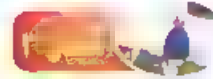


تدريب

في كراسة الرسم البياني:

أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية بيانياً.

$$\textcircled{١} \quad ٢س + ص = ٠ ، س + ٣ص = ٣ \quad \textcircled{٢} \quad ص = ١ - س ، س - ٣ص = ١$$



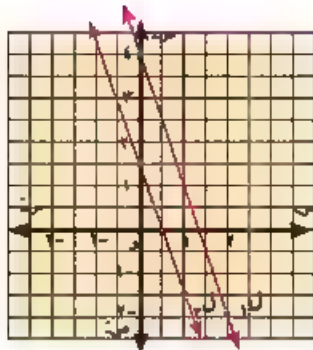
أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

أولاً: $3س + ص = 4$ ، (١) ، $٢ص + ٦س = ٣$ (٢)

ثانياً: $٣س + ٢ص = ٦$ ، (١) ، $ص = ٣ - \frac{٣}{٢}س$ (٢)

الحل

أولاً: بوضع المعادلة (١) على الصورة $ص = ٤ - ٣س$



بوضع $س = ٠$ ، $ص = ٤$ فيكون (٤، ٠) حلاً للمعادلة

بوضع $س = ٢$ ، $ص = -٢$ فيكون (٢، -٢) حلاً للمعادلة

ويكون لـ يمثل مجموعة حل المعادلة (١)

بوضع المعادلة (٢) على الصورة $ص = \frac{٦-٣}{٢}س$

بوضع $س = ٠$ ، $ص = \frac{٣}{٢}$ فيكون (٠، $\frac{٣}{٢}$) حلاً للمعادلة

بوضع $س = ١$ ، $ص = \frac{٣}{٢}$ فيكون (١، $\frac{٣}{٢}$) حلاً للمعادلة

ويكون لـ يمثل مجموعة الحل للمعادلة (٢)

∴ $ل١ ∩ ل٢ = \emptyset$ لا يوجد حل للمعادلتين معاً.

أي أنه لا يوجد حل للمعادلتين (١)، (٢) إذا كان لـ // لـ

من الهندسة التحليلية: ميل لـ $= \frac{٣}{٢}$ ، ميل لـ $= \frac{٦}{٢} = ٣$ ∴ لـ // لـ

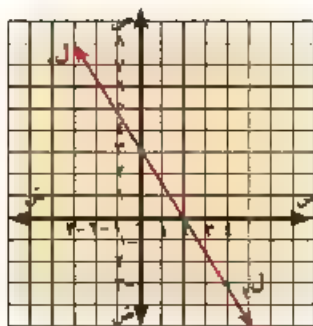
ثانياً: بوضع المعادلة (٢) على الصورة $ص = ٦ - ٣س$

أي $٣س + ٢ص = ٦$ وهي نفس المعادلة (١)

والشكل البياني الموضح يبين التمثيل البياني للمعادلتين بمستقيمين

منطبقين ونقول إن للمعادلتين (١)، (٢) عدداً غير منته من الحلول

وتكون مجموعة الحل هي $\{(س، ص) : ص = ٣ - \frac{٣}{٢}س\}$.



في كراسة الرسم البياني:

أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل زوج في المعادلات الآتية :

② $٢س + ص = ٤$ ، $٨ - ٢ص = ٤س$

③ $٥ - ص = ٣س$ ، $٨ - ٣س = ٨$

ثانياً حل معادلات الدرجة الأولى في متغيرين حديثاً

يمكن حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين آتياً بالتحلص من أحد المتغيرين، فحصل على معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد، وبحلها نحصل على قيمة هذا المتغير، ثم بالتعويض في إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الذي سبق التحلص منه .



أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$$\begin{cases} \text{س} - \text{ص} = 3 & (1) \\ \text{س} + 2\text{ص} = 4 & (2) \end{cases}$$

الحل :- (طريقة التعويض)

من المعادلة (1) $\text{ص} = 3 - \text{س}$

بالتعويض في المعادلة (2) عن ص $\therefore \text{س} + 2(3 - \text{س}) = 4$

فيكون : $\text{س} + 4 - 2\text{س} = 4 \therefore 10 = 5\text{س} \therefore \text{س} = 2$

بالتعويض في المعادلة (1) $\therefore \text{ص} = 3 - 2 = 1$

\therefore مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين $= \{(2, 1)\}$

حل آخر :- (طريقة الحذف)

ويتم حذف أحد المتغيرين من المعادلتين (بالجمع، أو الطرح) للحصول على معادلة ثالثة في متغير واحد وبحل المعادلة الناتجة نوجد قيمة هذا المتغير.

$$\begin{cases} \text{س} - \text{ص} = 3 & (1) \\ \text{س} + 2\text{ص} = 4 & (2) \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة (1) $\times 2 \therefore 2\text{س} - 2\text{ص} = 6$ (3)

من (2)، (3) بالجمع $\therefore 10 = 5\text{س} \therefore \text{س} = 2$

بالتعويض في (1) $\therefore 2 - \text{ص} = 3 \therefore \text{ص} = -1$

\therefore مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين $= \{(2, -1)\}$

أجب عن الأسئلة الآتية في كراسة الفصل:



١ أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

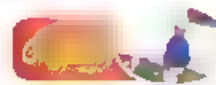
$$\begin{cases} \text{س} + 3\text{ص} = 24 & \text{أ} \\ \text{س} - 2\text{ص} = 2 & \text{ب} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{س} + 3\text{ص} = 4 & \text{ج} \\ \text{س} - 3\text{ص} = 5 & \text{د} \end{cases}$$

٢ ما عدد حلول كل زوج في المعادلات الآتية :

$$\begin{cases} 7\text{س} + 4\text{ص} = 6 & \text{أ} \\ 5\text{س} - 2\text{ص} = 14 & \text{ب} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\text{س} + 4\text{ص} = -4 & \text{أ} \\ 5\text{س} - 2\text{ص} = 15 & \text{ب} \end{cases}$$



أوجد قيمتي أ، ب علما بأن (٣، ١) حل للمعادلتين.

$$\begin{cases} ٣س + ب = ١٧ \\ ٥س - ٣ب = ٠ \end{cases}$$

الحل :

∴ حل للمعادلتين (٣، ١)

∴ حل للمعادلة ٣س + ب = ١٧

$$٣س + ب = ١٧ \quad (١)$$

∴ حل للمعادلة ٥س - ٣ب = ٠

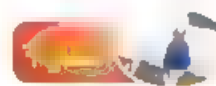
$$٥س - ٣ب = ٠ \quad (٢)$$

بطرح طرفي المعادلة (١) من طرفي المعادلة (٢) ينتج أن :

$$١٢س - ٣ب = ١٧$$

بالتعويض في المعادلة (١)

$$٣س + ١٢ = ١٧$$



عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١، وإذا عكس (بُذِل) وضع الرقمين، فإن العدد الناتج يزيد على العدد الأصلي بمقدار ٢٧ ما هو العدد الأصلي ؟

الحل :

نفرض أن رقم الآحاد = س، رقم العشرات = ص

$$١١ = ص + س \quad (١)$$

رقم الآحاد	رقم العشرات	قيمة العدد
س	ص	١٠ص + س
ص	س	١٠س + ص

العدد الناتج بعد تبديل الرقمين

$$٢٧ = \text{العدد الناتج بعد تبديل وضع رقمية - العدد الأصلي}$$

$$٢٧ = (١٠ص + س) - (١٠س + ص)$$

$$٢٧ = ٩ص - ٩س \quad \text{وبالقسمة على ٩}$$

بجمع المعادلتين (١)، (٢)

$$١٤س = ٧$$

$$٣س - ص = ٣ \quad (٢)$$

وبالتعويض في المعادلة (١)

$$١١ = ص + ٧$$

∴ العدد هو ٤٧



الخطوة الأولى من الحل

مجهول واحد بيانياً وجبرياً



سوف نتعلم

- ☆ كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانياً وجبرياً.

مصطلحات أساسية

- ☆ حل بيانى.
- ☆ حل جبرى.
- ☆ مجموعة الحل.

لاحظ المثال التالي :

سبق أن مثلنا بيانياً الدالة التربيعية d حيث :

$$d(s) = اس^2 + ب س + ج = ٠, \text{ حيث } ا \neq ٠$$

والمعادلة المناظرة لها هي $d(s) = ٠$ أى $اس^2 + ب س + ج = ٠$ وقد سبق لك حل هذه المعادلة بالتحليل.

$$\text{ولحل المعادلة : } اس^2 - ٤ س + ٣ = ٠$$

نحلل الطرف الأيمن للمعادلة فتأخذ الصورة :

$$٠ = (س - ٣) (س - ١)$$

$$\therefore س - ٣ = ٠ \text{ أو } س - ١ = ٠$$

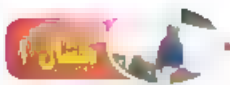
$$\therefore س = ٣ \text{ أو } س = ١$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل هي } \{ ١, ٣ \}$$

أولاً الحل البياني

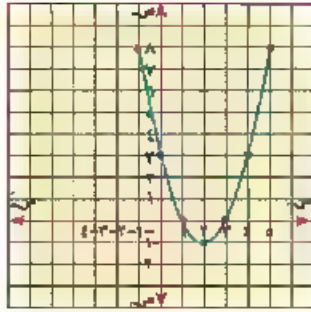
لحل المعادلة $اس^2 + ب س + ج = ٠$ بيانياً تتبع الآتي:

- نرسم منحنى الدالة d حيث $d(s) = اس^2 + ب س + ج$ حيث $ا \neq ٠$
- نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هي مجموعة حل المعادلة.



ارسم الشكل البياني للدالة d حيث $d(s) = اس^2 - ٤ س + ٣$ في الفترة $[-١, ٥]$

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : $اس^2 - ٤ س + ٣ = ٠$



الحل

نعين بعض الأزواج المرتبة (س، ص) التي تنتمي لبيان الدالة د، والتي مسقطها الأول س $\in [-1, 5]$

$$د(1) = 3, د(0) = 3, د(1) = 0$$

$$د(2) = -1, د(3) = 0, د(4) = 3, د(5) = 3$$

نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالآتي:

س	1	0	1	2	3	4	5
ص = د(س)	3	3	0	-1	0	3	3

نعين على المستوى الإحداثي النقط التي تمثل هذه الأزواج المرتبة، ثم نرسم منحنياً ممهداً يمر بهذه النقط.
من الرسم نجد أن منحنى الدالة د يقطع محور السينات في النقطتين (0، 3)، (4، 3) يسمى العددان 3، 1 بجذري المعادلة $س^2 - 4س + 3 = 0$
وتكون مجموعة حل المعادلة هي {3، 1}

في كراسة الرسم البياني أجب عن السؤالين التاليين:



١٧ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = $س^2 + 2س + 1$ في الفترة $[-4, 2]$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة: $س^2 + 2س + 1 = 0$

٢٠ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = $س^2 + 6س + 11$ في الفترة $[0, 6]$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة: $س^2 + 6س + 11 = 0$

ثاميا الحل الحبري باستخدام القانون العام



حل المعادلة: $س^2 - 6س + 7 = 0$ مستعيناً بفكرة إكمال المربع.

$$س^2 - 6س + 7 = 0 \quad \therefore س^2 - 6س + 9 - 9 + 7 = 0$$

$$\therefore (س - 3)^2 - 2 = 0 \quad \leftarrow (س - 3)^2 = 2$$

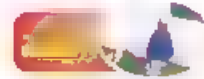
$$س - 3 = \pm \sqrt{2} \quad \therefore س = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$س = 3 + \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad س = 3 - \sqrt{2}$$

$$\therefore س = 3 \pm \sqrt{2}$$

يمكن حل معادلة الدرجة الثانية: $أس^2 + ب س + ج = ٠$ حيث $أ، ب، ج \in \mathbb{R}$ ، $أ \neq ٠$ باستخدام القانون العام.

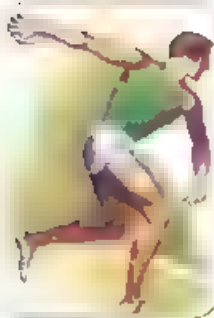
$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ} \quad \text{حيث } أ، ب، ج \in \mathbb{R}، أ \neq ٠$$



أوجد مجموعة حل المعادلة $س^3 - ٥س^2 + ١س - ١ = ٠$ تقريبًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore س^3 - ٥س^2 + ١س - ١ &= ٠ \\ \therefore ١، ٣، ٥، -١، -٣، -٥، -١، -٣، -٥ &= ٠ \\ \therefore س &= \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ} = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times (-١)}}{٢ \times ١} = \frac{-١ \pm \sqrt{٥}}{٢} \\ \text{إما } س &= \frac{-١ + \sqrt{٥}}{٢} = ١، ٤٤ \quad \text{أ، } س = \frac{-١ - \sqrt{٥}}{٢} = -٠، ٢٣ \\ \therefore \text{مجموعة الحل هي: } &\{١، ٤٤، -٠، ٢٣\} \end{aligned}$$



في إحدى مسابقات رمي القرص كان مسار القرص بالنسبة لأحد اللاعبين يتبع العلاقة: $ص = -٠، ٤٣س^2 + ٤، ٩س + ١٣$ حيث $ص$ تمثل المسافة الأفقية بالمتري، $ص$ تمثل ارتفاع القرص عن سطح الأرض. أوجد المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص بدءًا من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore ١٣ - ٠، ٤٣س^2 + ٤، ٩س &= ٠ \\ \therefore س &= \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ} = \frac{-٤، ٩ \pm \sqrt{(٤، ٩)^2 - ٤ \times (-٠، ٤٣) \times ١٣}}{٢ \times (-٠، ٤٣)} \\ &= \frac{-٤، ٩ \pm \sqrt{٢٦، ٢٤٦}}{-٠، ٨٦} \\ \text{إما } س &= \frac{-٤، ٩ + \sqrt{٢٦، ٢٤٦}}{-٠، ٨٦} = ٢، ٥٩ \quad \text{(مرفوض) لماذا؟} \\ \text{أ، } س &= \frac{-٤، ٩ - \sqrt{٢٦، ٢٤٦}}{-٠، ٨٦} = ١١٦، ٥٤٦٥١١٦ \text{ متر} \\ \therefore \text{المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص } &١١٦، ٥٥ \text{ متر.} \end{aligned}$$



سوف نتعلم

☆ كيفية حل معادلتين في

متغيرين إحداهما من

الدرجة الأولى والآخرى

من الدرجة الثانية.

مصطلحات أساسية

☆ معادلة من الدرجة الأولى.

☆ معادلة من الدرجة الثانية.

☆ مجموعة الحل.

تمهيد:

نعلم أن المعادلة $٢س - ٣ = ص$ هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين، بينما المعادلات: $٢س + ٥ = ص$ ، $٥ = ص$ هي معادلات من الدرجة الثانية في متغيرين لماذا؟ وسوف نقوم بحل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والآخرى من الدرجة الثانية، ويعتمد الحل على طريقة التعويض كما سيتضح من الأمثلة التالية.

حساب ذهني إذا كان: $س + ص = ١٠$ ، $٢س - ٢ = ص$ فأوجد $س - ص$.



أوجد جبرياً مجموعة الحل للمعادلتين:

$$س + ٢ = ١ + ص، \quad ٤س + ٢ = ص - ٣ \quad س = ١$$

الحل:

من المعادلة الأولى: $ص = -(٢ + ١)$ وبالتعويض في المعادلة الثانية.

$$٠ = ٤س + ٢ - [-(٢ + ١)] \quad ٣ - ٢ = ٤س + ٢ \quad ١ = ٤س + ٢$$

$$٠ = ٤س + ٢ \quad ٤س + ٢ = ١ \quad ٤س = ١ - ٢ \quad ٠ = ٤س - ١$$

$$٠ = ٤س - ١ \quad ٤س = ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١$$

$$٠ = ٤س - ١ \quad ٤س = ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١$$

وبالتعويض عن قيم $س$ في المعادلة الأولى:

$$٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١$$

$$٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١$$

$$٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١ \quad ٠ = ٤س - ١$$

٢٠ مستطيل محيطه ١٤ سم، ومساحته ١٢ سم^٢. أوجد كلاً من بعديه.

الحل

نفرض أن بعدي المستطيل س، ص

∴ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض) ∴ ١٤ = ٢ (س + ص) وبقسمة الطرفين على ٢

$$٧ = س + ص \quad \text{أي أن } ص = ٧ - س \quad (١) \dots\dots\dots$$

$$∴ \text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض} \quad ∴ س \times ص = ١٢ \quad (٢) \dots\dots\dots$$

وبالتعويض من المعادلة (١) في المعادلة (٢):

$$١٢ = س(٧ - س) \quad ٧ - س = ١٢ / س \quad ٧ = ١٢ / س + س$$

$$٠ = (٣ - س)(٤ - س) \quad ٣ = س \quad \text{أو} \quad ٤ = س$$

عندما: س = ٣ ∴ ص = ٧ - ٣ = ٤ ∴ وبالتعويض في المعادلة (١)

عندما: س = ٤ ∴ ص = ٧ - ٤ = ٣ ∴ بعدا المستطيل هما ٣ سم، ٤ سم.

٢١ عدد مكون من رقمين رقم أحاده ضعف رقم عشراته، إذا كان حاصل ضرب

الرقمين يساوي نصف العدد الأصلي. فما هو العدد؟

الحل

نفرض أن رقم الأحاد = س، رقم العشرات = ص

∴ العدد الأصلي = س + ١٠ ص

∴ رقم الأحاد ضعف رقم العشرات

$$س = ٢ ص \quad (١) \longleftarrow$$

∴ حاصل ضرب الرقمين = $\frac{١}{٤}$ العدد الأصلي

$$س \times ص = \frac{١}{٤} (س + ١٠ ص) \quad (٢) \longleftarrow \text{بحل (١)، (٢) معاً}$$

$$٢ ص \times ص = \frac{١}{٤} (٢ ص + ١٠ ص)$$

$$٢ ص = ٦ ص \quad ٢ ص (٣ - ص) = ٠$$

∴ ص = ٣، أ، ص = ٠ (مرفوض) ∴ بالتعويض في المعادلة (١)

$$س = ٦ \quad ∴ \text{العدد المطلوب} = ٣٦$$



سوف تتعلم

- ☆ كيفية إيجاد مجموعة
- أصفار الدالة كثيرة الحدود.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة كثيرة الحدود.
- ☆ مجموعة أصفار الدالة.

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

٩ أمثلة

إذا كانت د: ح \leftarrow ح حيث د(س) = $س^3 - ٢س^2 + ٢س$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة في س أوجد د(٠)، د(١)، د(٢) ماذا تلاحظ؟
نلاحظ أن: د(٠) = ٠، د(١) = ٠، د(٢) = ٠
 لذا يسمى: ٠، ١، ٢ أصفاراً للدالة د.

إذا كانت د: ح \leftarrow ح كثيرة حدود في س فإن مجموعة قيم س التي تجعل د(س) = ٠ تسمى مجموعة أصفار الدالة د، ويرمز لها بالرمز ص(د).

أي أن: ص(د) هي مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠
 وعموماً للحصول على أصفار الدالة د نضع د(س) = ٠ ونحل المعادلة الناتجة لإيجاد مجموعة قيم س.



أوجد ص(د) لكل من دوال كثيرات الحدود الآتية:

١ د(س) = $س^2 - ٤$	٢ د(س) = $س^2 - ٩$
٣ د(س) = ٥	٤ د(س) = ٠
٥ د(س) = $س^2 + ٤$	٦ د(س) = $س^3 - ٣٢$
٧ د(س) = $س^2 + س + ١$	

الحل:

١ د(س) = $س^2 - ٤$	بوضع د(س) = صفر	٢ د(س) = $س^2 - ٩$
أي $س^2 = ٤$	$٢ = س$	٣ د(س) = ٥
		٤ د(س) = ٠

٢) د(س) = س^٢ - ٩

بوضع د(س) = صفر \therefore س^٢ - ٩ = ٠

أي س^٢ = ٩ \therefore س = ٣ \therefore ص(د) = (٣، -٣).

٣) \therefore د(س) = ٥

\therefore لا يوجد أي عدد حقيقي يجعل د(س) = ٠

٤) \therefore د(س) = ٠

\therefore جميع الأعداد الحقيقية ح تكون أصفاراً لهذه الدالة

بوضع س^٢ + ٤ = ٠

\therefore س^٢ = -٤ \therefore س = $\pm 2i$ \therefore ص(د) هو ϕ

٥) بوضع س^٢ - ٣٢ = ٠

\therefore س(س^٢ - ٣٢) = ٠ \therefore س = ٠، س^٢ = ٣٢

وعندما س^٢ = ٣٢ \therefore س = $\pm 4\sqrt{2}$ \therefore ص(د) = (٠، ٢)

٦) بوضع س^٢ + س + ١ = صفر

حيث يتعدّر علينا تحليل المقدار س^٢ + س + ١ لذلك نلجأ إلى استخدام القانون لحل المعادلة التربيعية

فيكون س = $\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$ حيث ١ = ب، ١ = ج = ١

\therefore س = $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

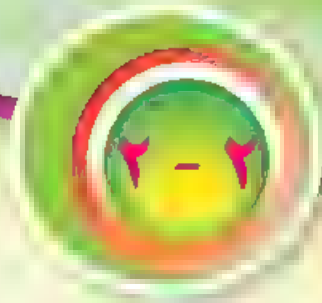
\therefore لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة ويكون ص(د) = ϕ



١) أوجد مجموعة أصفار الدوال الآتية:

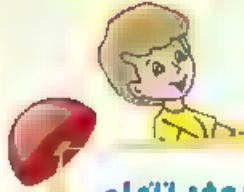
أ) د(س) = س^٢ - ٤س^٢ ب) د(س) = س^٢ - ٢س + ١ ج) د(س) = س^٢ - ٢س - ١

د) د(س) = س^٢ - ٤س^٢ هـ) د(س) = س^٢ - ٢س + ١ و) د(س) = س^٢ - ٢س - ١



الدالة الكسرية الجبرية

مكم 9 ناقض



سوف نتعلم

☆ مفهوم الدالة الكسرية الجبرية.

سبق أن درست العدد النسبي الذي على الصورة $\frac{1}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
فإذا كانت $ق: ح \leftarrow ح$ ، $ق(س) = س + ٢$ ،
 $د: ح \leftarrow ح$ ، $د(س) = س - ٢$ ،
أوجد مجال $ق, د$.

١٢ إذا كان $ن(س) = \frac{ق(س)}{د(س)}$ هل تستطيع إيجاد مجال $ن$ متى علم مجال كل من $ق, د$ ؟

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة كثيرة الحدود.
- ☆ مجال الكسر الجبري.
- ☆ مجال مشترك لكسرين جبريين.

مما سبق نستنتج الآتي:

ن نسمى دالة كسرية جبرية أو كسرًا جبريًا حيث $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ٢}$ ويكون مجال $ن$ في هذه الحالة هو ح عدا قيم $س$ التي تجعل الكسر غير معرف (مجموعة أصفار المقام).
أي أن: مجال $ن$ هو ح - {٢، -٢}

إذا كان $ق, د$ كثيرتي حدود، وكان $ص(د)$ هي مجموعة أصفار $د$ فإن الدالة $ن$ حيث:

$$ن: ح - ص(د) \leftarrow ح, ن(س) = \frac{ق(س)}{د(س)}$$

تسمى دالة كسرية جبرية حقيقية واختصارًا تسمى كسرًا جبريًا.

للتلحظ أن: مجال الدالة الكسرية الجبرية - ح - مجموعة أصفار المقام.

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون فيها هذه الكسور معرفة معاً (في آن واحد).



إذا كان n_1, n_2 كسرين جبريين حيث:

$$n_1 = \frac{1}{s-1}, n_2 = \frac{2}{s-2}$$

فأوجد المجال المشترك لكُلٍّ من n_1, n_2

الحل:

بفرض أن M_1 مجال n_1, M_2 مجال n_2 .

$\therefore M_1 = \{1\}, M_2 = \{2\}$ ويكون المجال المشترك للكسرين $n_1, n_2 = M_1 \cap M_2$

حيث: $M_1 \cap M_2 = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$

$$= \emptyset$$

بلاحظ أنه لأي قيمة للمتغير s تنتمي إلى المجال المشترك يكون كلٌّ من n_1, n_2 معرفاً (له وجود)

وعموماً

إذا كان n_1, n_2 كسرين جبريين وكان:

مجال $n_1 = \{s_1\}$ (حيث s_1 مجموعة أصفار مقام n_1)

مجال $n_2 = \{s_2\}$ (حيث s_2 مجموعة أصفار مقام n_2)

فإن: المجال المشترك للكسرين $n_1, n_2 = \{s_1\} \cap \{s_2\}$

$= \emptyset$ - مجموعة أصفار مقامى الكسرين.

ويكون المجال المشترك لعدد من الكسور الجبرية

$= \emptyset$ - مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور.



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم تساوي كسرين جبريين.
- ☆ كيفية تحديد متى يتساوى كسران جبريان.

مصطلحات أساسية

- ☆ اختزال الكسر الجبري.
- ☆ تساوي كسرين جبريين.

اختزال الكسر الجبري

مكر ٩ ناقش

إذا كان ن كسرًا جبريًا حيث: $n = \frac{س^2 + س}{س^2 - ١}$ فإن:

- ١ مجال ن = ح - {١، -١}
- ٢ العامل المشترك بين البسط والمقام بعد تحليل كل منهما تحليلًا كاملاً هو $س + ١ \neq$ صفر حيث س لا تأخذ القيمة ١، -١
- ٣ الكسر الجبري في أبسط صورة بعد حذف العامل المشترك $= \frac{س}{س - ١}$
- ٤ هل يتغير مجال الكسر الجبري ن بعد وضعه في أبسط صورة؟

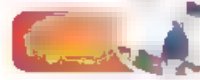
مما سبق نستنتج أن

وضع الكسر الجبري في أبسط صورة يسمى باختزال الكسر الجبري.

وعند اختزال الكسر الجبري ننتج الخطوات الآتية:

- ١ تحليل بسط ومقام الكسر الجبري تحليلًا كاملاً.
- ٢ حقن مجال الكسر الجبري هل يحذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام.
- ٣ يحذف العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام للحصول على أبسط صورة.

تعريف: يقال إن: الكسر الجبري ن في أبسط صورة له إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه.



إذا كان n (س) = $\frac{س^3 + س^2 - 6س}{س^4 - 13س^2 + 36}$ اختصر n (س) إلى أبسط صورة مبيّنًا مجال n .

الحل:

$$n(س) = \frac{س(س^2 + س - 6)}{س^4 - 13س^2 + 36} = \frac{س(س^2 + س - 6)}{س^2(س^2 - 13 + \frac{36}{س^2})} = \frac{س(س^2 + س - 6)}{س^2(س - 2)(س - 9)}$$

∴ مجال n (س) = $\{س \mid س \neq 2, 9\}$.

اختزل $(س + 3)$ ، $(س - 2)$ من البسط والمقام.

$$\frac{س}{(س - 2)(س + 3)} = n(س)$$

متساوي كسريين حيزيين

فكر وناقش

أوجد في أبسط صورة كلا من n_1 (س)، n_2 (س) مبيّنًا المجال لكل منهما في كلٍّ مما يأتي:

① n_1 (س) = $\frac{س^3 + س}{س^4 - 2س^2}$ ، n_2 (س) = $\frac{2}{س^3 - 6س}$

② n_1 (س) = $\frac{س^2}{س^4 + 2س^2 + 4}$ ، n_2 (س) = $\frac{س^2 + 2س}{س^4 + 2س^2 + 4}$

هل $n_1 = n_2$ في كل حالة؟ وضع أجابتك.

الانتباه مما سبق أن:

① n_1 (س) = $\frac{س^3 + س}{س^4 - 2س^2} = \frac{س(س^2 + 1)}{س^2(س^2 - 2)}$ ومجال n_1 = $\{س \mid س \neq \pm \sqrt{2}\}$

ومجال n_2 = $\{س \mid س \neq \pm \sqrt{3}\}$

أي أن: $n_1 \neq n_2$ ، n_1 اختزل إلى نفس الكسري، ولكن مجال $n_1 \neq$ مجال n_2 .

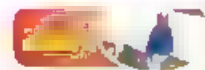
② n_1 (س) = $\frac{س^2}{س^4 + 2س^2 + 4} = \frac{س^2}{(س^2 + 2)^2}$ ومجال n_1 = $\{س \mid س \neq \pm 2i, \pm 2i\}$

ومجال n_2 = $\{س \mid س \neq \pm 2i, \pm 2i\}$

أي أن: $n_1 = n_2$ ، n_1 اختزل إلى نفس الصورة، مجال $n_1 =$ مجال n_2 .

مما سبق نستنتج أن:

يقول إن الدالتين f ، g متساويتان أي: $f = g$ إذا تحقق الشرطان التاليان معًا
مجال $f =$ مجال g ، $f(س) = g(س)$ لكل $س$ في المجال المشترك.



أثبت أن : $n_1 = n_2$

٢ إذا كانت $n_1 (س) = \frac{س^2}{س^2 - س} = n_2 (س) = \frac{س^2 + س^2 + س}{س^2 - س}$

الحل

∴ $n_1 (س) = \frac{س^2}{س^2 - س} = \frac{س^2}{س(س - 1)} = \frac{س}{س - 1}$

ومجال $n_1 = ح - \{1, 0\}$

∴ $n_2 (س) = \frac{س(س^2 + س^2 + س)}{س^2 - س} = \frac{س(س + س + 1)}{س(س - 1)} = \frac{س + س + 1}{س - 1}$

∴ $n_2 (س) = \frac{1}{س - 1}$

ومجال $n_2 = ح - \{1, 0\}$

من ١، ٢

∴ $n_1 = n_2$

∴ مجال $n_1 =$ مجال n_2 ، $n_1 (س) = n_2 (س)$ لكل $س \in ح - \{1, 0\}$

٣ إذا كان $n_1 (س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + س - ٦}$ ، $n_2 (س) = \frac{س^2 - ٢س - ٦}{س^2 - ٩}$

فأثبت أن $n_1 (س) = n_2 (س)$ لجميع قيم $س$ التي تنتمي إلى المجال المشترك، وأوجد هذا المجال .

الحل

∴ $n_1 (س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + س - ٦} = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٣)} = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

ومجال $n_1 = ح - \{٢، -٣\}$

∴ $n_2 (س) = \frac{س^2 - ٢س - ٦}{س^2 - ٩} = \frac{س(س - ٢) - ٦}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{س(س - ٢) - ٦}{(س - ٣)(س + ٣)}$

ومجال $n_2 = ح - \{٣، ٠، -٣\}$

من ١، ٢

لأنه أن : $n_1 (س) \neq n_2 (س)$ اختزلا إلى نفس الكسر $\frac{س + ٢}{س + ٣}$

إلا أن مجال $n_1 \neq$ مجال n_2 لذلك $n_1 \neq n_2$

ونستطيع أن نقول إن : $n_1 (س) = n_2 (س)$ يأخذان نفس القيم إذا كانت $س$ تنتمي إلى المجال المشترك

للدائيتين n_1 ، n_2 وهو $ح - \{٣، ٠، -٣\}$.



سوف تتعلم

☆ كيفية إجراء العمليات

(+ , × , - , ÷)

على الكسور الحشرية

مصطلحات أساسية

☆ معكوس جمعي للكسر

الجبري.

☆ معكوس ضربي للكسر

الجبري.

أولاً جمع و طرح الكسور الحشرية

فكر و ناقش

١ إذا كانت $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{q}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad , \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

٢ إذا كان $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{q}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad , \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

مما سبق يمكننا إجراء عملية جمع أو طرح كسرين حشريين متحدى أو مختلفي المقام كالآتي :

إذا كان $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{q}$ عددين حشريين مشتركين للمقامين p ، q حيث:

$$\frac{1}{p} = \frac{a}{p} \quad , \quad \frac{1}{q} = \frac{b}{p} \quad , \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a-b}{p}$$

(كسرين حشريين متحدى المقام)

$$\text{فإن: } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p} = \frac{a+b}{p}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a}{p} - \frac{b}{p} = \frac{a-b}{p}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{a}{p} \quad , \quad \frac{1}{q} = \frac{b}{q} \quad , \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a}{p} - \frac{b}{q}$$

(كسرين حشريين مختلفي المقام)

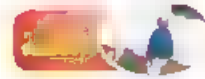
$$\text{فإن: } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{aq + bp}{pq}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a}{p} - \frac{b}{q} = \frac{aq - bp}{pq}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{a}{p} \quad , \quad \frac{1}{q} = \frac{b}{q} \quad , \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a}{p} - \frac{b}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{aq + bp}{pq}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a}{p} - \frac{b}{q} = \frac{aq - bp}{pq}$$



٢١ إذا كان $\frac{س}{س^2+٢س} = (س)١$ ، $\frac{س+٢}{س^٢-٤س} = (س)٢$ ،

أوجد $(س)١ + (س)٢$ مبيناً مجال $ن$.

الحل

∴ $(س)١ = (س)١ + (س)٢$

∴ $(س)١ = \frac{س}{س^2+٢س} + \frac{س+٢}{س^٢-٤س} = \frac{س}{س(س+٢)} + \frac{س+٢}{س(س-٢)} = \frac{س}{س(س+٢)} + \frac{س+٢}{س(س-٢)}$

مجال $ن = ح - \{٢، -٢\}$

∴ $(س)١ = \frac{س}{س(س+٢)} + \frac{س+٢}{س(س-٢)} = \frac{١}{س+٢} + \frac{١}{س-٢} = \frac{س-٢+س+٢}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{٢س}{(س-٢)(س+٢)}$

٢٢ **أوجد** $(س)١$ في أبسط صورة مبيناً مجال الدالة $ن$ حيث:

$(س)١ = \frac{س^٣-٤س}{س^٢+٦س-٦} + \frac{س^٢+٦س}{س^٢+٦س-٦}$

الحل

∴ $(س)١ = \frac{س^٣-٤س}{س^٢+٦س-٦} + \frac{س^٢+٦س}{س^٢+٦س-٦} = \frac{س^٣-٤س+س^٢+٦س}{س^٢+٦س-٦} = \frac{س^٣+س^٢+٢س}{س^٢+٦س-٦}$

مجال $ن = ح - \{٣، ٢، -٣\}$

∴ $(س)١ = \frac{س^٣+س^٢+٢س}{س^٢+٦س-٦} = \frac{س(س^٢+س+٢)}{س(س+٦)-٦}$

∴ م.م. للمقامات $(س+٦)(س-٣)$ وبضرب حدى الكسر الثانى فى $(س-٣)$

∴ $(س)١ = \frac{س(س^٢+س+٢)}{س(س+٦)-٦} = \frac{س(س^٢+س+٢)}{س^٢+٦س-٦} = \frac{س(س^٢+س+٢)}{س(س+٦)-٦}$

$\frac{٥}{٣-س} = \frac{٥(س-٣)}{(س-٣)(٣-س)} = \frac{٥(س-٣)}{(س-٣)(٣-س)}$

٢٢ اوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن حيث :

$$ن(س) = \frac{١٢}{٣ - ٢س} + \frac{٢}{٢س - ٤} ، ثم أوجد ن(٠) ، ن(١-) إن أمكن ذلك.$$

الحل

(الترتيب تنازلي حسب قوى س)

$$\therefore ن(س) = \frac{١٢}{٣ - ٢س} + \frac{٢}{٢س - ٤}$$

$$= \frac{١٢}{٣ - ٢س} + \frac{٢}{٢(س - ٢)}$$

$$= \frac{١٢}{٣(١ - \frac{٢}{٣}س)} - \frac{١}{(س - ٢)}$$

(التحليل)

$$= \frac{١}{(س - ٢)} - \frac{٤}{(س + ١)(س - ٢)}$$

$$\text{مجال د} = ح - \left\{ \frac{١}{٢}, ٠, -\frac{١}{٢} \right\}$$

$$\text{م.م. أ. للمقامات} = س(س + ١)(س - ٢)$$

$$\therefore ن(س) = \frac{س}{س(س + ١)(س - ٢)} - \frac{٤}{س(س + ١)(س - ٢)}$$

$$\therefore ن(س) = \frac{س - ٤}{س(س + ١)(س - ٢)}$$

$$= \frac{١}{س(س + ١)(س - ٢)}$$

ن(٠) ليس لها وجود لأن الصفر \notin مجال الدالة ن ،

$$ن(١-) = \frac{١}{١- \times ١-} = \frac{١}{(١+٢-) \times ١-}$$

$$\text{إذا كانت } n \text{ (س)} = \frac{3s^2 + 6s - 40}{s^2 + 3s - 4} + \frac{s^2 - 9}{s^2 + 3s}$$

فأوجد n (س) في أبسط صورة موضحة مجال n .

الحل:

$$\therefore n \text{ (س)} = \frac{3s^2 + 6s - 40}{s^2 + 3s - 4} + \frac{s^2 - 9}{s^2 + 3s} = n \text{ (س)} \therefore \frac{(3-s)(5+s)}{(3-s)(3+s)} + \frac{(3+s)(3-s)}{(3+s)^2}$$

$$\text{مجال } n = \{3 \neq 0, 5 \neq 0, 3 \neq 0, 3 \neq 0\}$$

$$\therefore n \text{ (س)} = \frac{(3-s)(3+s)}{(3-s)(3+s)} \times \frac{(3-s)(3+s)}{(3-s)(3+s)} = \frac{(3-s)(3+s)}{(3-s)(3+s)}$$

$$\frac{(3-s)(3+s)}{(3-s)(3+s)} = \frac{(3-s)(3+s)(3-s)(3+s)}{(3-s)(3+s)(3-s)(3+s)}$$

أوجد n (س) في أبسط صورة مبينة مجال n :

$$n \text{ (س)} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 3s + 9} \div \frac{s^2 + 2s}{s^2 - 27}$$

ثم أوجد n (2)، n (-2) إن أمكن.

الحل:

$$n \text{ (س)} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 3s + 9} \times \frac{s^2 + 2s}{s^2 - 27}$$

$$\frac{(s^2 + 2s)(s^2 + 2s)}{(s^2 + 3s + 9)(s^2 - 27)} =$$

$$\therefore \text{مجال } n = \{3 \neq 0, 2 \neq 0\}$$

$$\therefore n \text{ (س)} = \frac{s}{s^2 - 3}$$

$$2 = \frac{2}{3-2} = (2) \text{،}$$

n (-2) غير معرفة لأن $2 \neq 0$ مجال n

الاحتمال

الوحدة الثالثة

الاحتمال





سوف نتعلم

- ☆ إجراء العمليات على الأحداث (التقاطع - الاتحاد).

مصطلحات أساسية

- ☆ تقاطع
- ☆ اتحاد
- ☆ حدثان متنافيان
- ☆ شكل فن.

التقاطع والاتحاد

تعلم أن:

إذا أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائياً. ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي فإن:



- ① قضاء العينة (ف) = $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.
- ② حدث ظهور العدد ٧ هو ϕ ويسمى الحدث المستحيل واحتمال ظهوره = صفر
- ③ حدث ظهور عدد أقل من ٩ هو ف ويسمى الحدث المؤكد واحتمال ظهوره = ١
- ④ حدث ظهور عدد أولي زوجي هو $\{ 2 \}$ وهو مجموعة جزئية من ف واحتمال وقوعه = $\frac{1}{6}$

فإذا كان حدث من ف أي: $A \subset F$ فإن: $P(A) = \frac{n(A)}{n(F)}$

حيث: n (أ) عدد عناصر الحدث أ، n (ف) عدد عناصر فضاء العينة ف،
 P (أ) احتمال وقوع الحدث أ

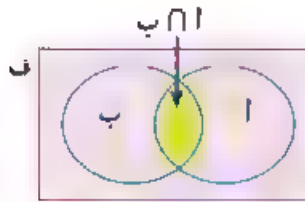
نلاحظ أن: يمكن كتابة الاحتمال في صورة كسر أو نسبة مئوية كما يلي:

مؤكد الحدوث	غالباً	أحياناً	نادراً	مستحيل الحدوث
١	٣	١	١	٠
٤	٤	٢	٤	٠
%١٠٠	%٧٥	%٥٠	%٢٥	%٠

العمليات على الأحداث:

حيث إن الأحداث هي مجموعات جزئية من فضاء العينة (ف)، لذلك فإن العمليات على الأحداث هي نفس العمليات على المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع، وباعتبار فضاء العينة (ف) المجموعة الشاملة نستطيع التعبير عن الأحداث والعمليات عليها بأشكال فن كما يلي:

أولاً: التقاطع



إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن تقاطع الحدثين أ، ب والذي يرمز له بالرمز $A \cap B$ يعني حدث وقوع أ و ب معاً.

لاحظ أن: يُقال إن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة عنصراً من عناصر المجموعة التي تعبر عن هذا الحدث.

(١)



مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ بدون تكرار خلطت جيداً، فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائياً.

١ اكتب فضاء العينة

٢ اكتب الأحداث الآتية.

أ الحدث: أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً زوجياً.

ب الحدث: أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً أولياً.

ج الحدث: أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً يقبل القسمة على ٤.

٣ باستخدام أشكال فن احسب احتمال:

أ حدث وقوع الحدثين أ، ب معاً.

ب حدث وقوع الحدثين ب، ج معاً.

الحل

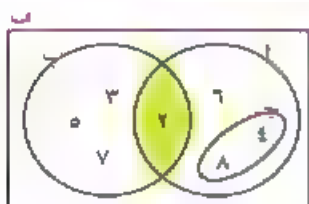
١ ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨} ، ن (ف) = ٨

٢ أ = {٢، ٤، ٦، ٨}

ب = {٢، ٣، ٥، ٧}

ج = {٤، ٨}

باستخدام شكل فن المقابل نجد أن:



حدث وقوع الحدثين أ، ب معاً يعني $A \cap B$ حيث:

$A \cap B = \{2\}$ وهي مجموعة ذات عنصر واحد

$$\therefore n(A \cap B) = 1$$

\therefore احتمال وقوع الحدثين أ، ب معاً = $n(A \cap B)$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

حدث وقوع الحدثين أ، ج معاً يعني $A \cap C$ حيث:

$$A \cap C = \{1, 4\} \quad \therefore n(A \cap C) = 2$$

$$\therefore \text{احتمال وقوع الحدثين أ، ج معاً} = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

حدث وقوع الحدثين ب، ج معاً يعني $B \cap C$ حيث:

$$B \cap C = \emptyset \quad (\text{لأن ب، ج مجموعتان منفصلتان أو متباعدتان}) \quad n(B \cap C) = 0 = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{احتمال وقوع الحدثين ب، ج معاً} = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{0}{8} = 0 = \text{صفر}$$

لاحظ أن: الحدثين ب، ج لا يمكن وقوعهما في آن واحد، ولذلك يقال إن الحدثين ب، ج حدثان متنافيان.

الأحداث المتنافية:



يقال إن الحدثين أ، ب متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$

$$\text{ويكون } n(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } \emptyset}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد عناصر ف}} = \text{صفر}$$

ويقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت متنافية مشي مشي.

مثال ٢: إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائياً، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي.

أولاً: اكتب فضاء العينة ف.

ثانياً: أوجد ما يأتي:

ب: حدث ظهور عدد فردي.

أ: حدث ظهور عدد زوجي.

ج: حدث ظهور عدد أولي.

نأش:

٢ هل الأحداث أ، ب، ج أحداث متنافية؟

١ أوجد $n(A \cap B)$

الحل:

نأش: ١ $\therefore A \cap B = \emptyset$

$$\therefore n(A \cap B) = \text{صفر}$$

أولاً: ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ثانياً: أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

ج = {٢، ٣، ٤، ٥}

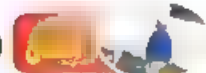
٢ $A \cap B = \{2\}$ ، $B \cap C = \{2\}$ ، $A \cap C = \{2\}$

\therefore الأحداث أ، ب، ج غير متنافية.

ثانيًا، الاتحاد

إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة (F) فإن اتحاد الحدثين، والذي يُرمز له بالرمز $A \cup B$ يعني حدث وقوع الحدثين A أو B أو كليهما، أي حدث وقوع أحدهما على الأقل.

(٣)



١) تسع بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٩ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا.

أولًا: اكتب فضاء العينة.

ثانيًا: اكتب الأحداث الآتية.

١. أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا.

٢. أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا يقبل القسمة على ٣.

٣. أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أوليًا أكبر من ٥.

ثالثًا: باستخدام شكل فن احسب احتمال كل من:

١. حدث وقوع A أو B

٢. أوجد $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$ ماذا تلاحظ؟

الحل

أولًا: $F = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩\}$ ، $n(F) = ٩$

ثانيًا: $A = \{٢, ٤, ٦, ٨\}$ ، $n(A) = ٤$ ، $B = \{٣, ٦, ٩\}$ ، $n(B) = ٣$ ، $A \cap B = \{٦\}$ ، $n(A \cap B) = ١$

ثالثًا: من شكل فن المقابل:

١. حدث وقوع A أو B يعني $A \cup B$

حيث: $A \cup B = \{٢, ٣, ٤, ٦, ٨, ٩\}$ ، $n(A \cup B) = ٦$

$$\therefore \text{احتمال وقوع } A \text{ أو } B = P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(F)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

٢. حدث وقوع A أو B يعني $A \cup B$ وهما مجموعتان منفصلتان.

فيكون $A \cup B = \{٢, ٤, ٦, ٨, ٩\}$ ، $n(A \cup B) = ٥$

$$\therefore \text{احتمال وقوع } A \text{ أو } B = P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(F)} = \frac{٥}{٩}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{9} - \frac{n(B)}{n(F)} - \frac{n(A)}{n(F)} = \frac{4}{9} \\ & \frac{1}{9} = \frac{n(A \cap B)}{n(F)} = n(A \cap B) \therefore \\ & \frac{2}{3} = \frac{1}{9} - \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = n(A \cap B) - n(B) + n(A) \\ & \frac{2}{3} = n(A \cup B) \end{aligned}$$

من (١)، (٢) يكون

$$n(A \cup B) = n(A \cap B) - n(B) + n(A)$$

يلاحظ أن أ، ج حدثان متنافيان .
 فيكون $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ لكن $n(A \cap B) = 0$
 لكن $n(A \cap B) = 0$
 $\therefore n(A \cup B) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - 0 = \frac{5}{9}$
 كما سبق إيجاداه
 أي أنه إذا كان أ، ج حدثين متنافيين فإن $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(٤) 

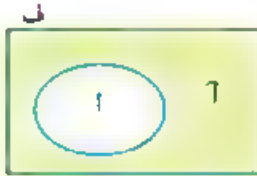
إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما، وكان $n(A) = \frac{1}{3}$ ، $n(A \cup B) = \frac{7}{12}$ فأوجد $n(B)$.

الحل:

$$\begin{aligned} & \therefore n(A \cap B) = 0 \\ & \therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) \\ & \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + n(B) \\ & \therefore n(B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

الحادث المكمل، والفرق بين حدثين

لاحظ أن:



في شكل فن المقابل:
إذا كانت F المجموعة الشاملة، $A \subset F$
فإن مكمله المجموعة A هي \bar{A} ويلاحظ أن

$$\bar{A} = F \setminus A \quad , \quad \bar{\bar{A}} = A$$

إذا كانت $F = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧\}$ ، $A = \{٢, ٤, ٦\}$ فإن: $\bar{A} = \{١, ٣, ٥, ٧\}$

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان F فضاء العينة لتجربة عشوائية، وسحبت كرة واحدة من صندوق به كرات متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٧ وملاحظة الرقم عليها.

أحدث ظهور عدد زوجي: $A = \{٢, ٤, ٦\}$

أحدث ظهور عدد فردي: $\bar{A} = \{١, ٣, ٥, ٧\}$ وهو حدث مكمل للحدث A

لنأخذ الحدث المكمل:

الحدث المكمل للحدث A هو \bar{A} وهو حدث عدم وقوع A .

أي أن: إذا كان $A \subset F$ فإن \bar{A} هو الحدث المكمل للحدث A

$$\bar{\bar{A}} = A \quad , \quad \bar{A} = F \setminus A$$

أي أن الحدث والحدث المكمل له هما حدثان متنافيان.

مثال ١٠

إذا كان F فضاء العينة لتجربة عشوائية، $A \subset F$ ، \bar{A} هو الحدث المكمل للحدث A ، $F = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$.

أكمل الجدول التالي وسجّل ملاحظاتك. (بكراسة العمل)

الحدث A	الحدث \bar{A}	$A \cup \bar{A}$	$A \cap \bar{A}$
$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$
$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$
$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$
$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$
$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$	$\{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\}$

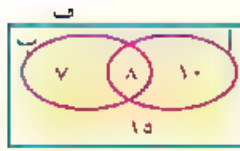
من الجدول السابق لاحظ أن: $A \cup \bar{A} = F$ ، $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ، $\bar{A} = F \setminus A$ ، $A = F \setminus \bar{A}$

ملاحظة: $A \cup \bar{A} = F$ ، $A \cap \bar{A} = \emptyset$



- ٢١ فصل دراسي به ٤٠ تلميذاً منهم ١٨ تلميذاً يقرءون جريدة الأخبار، ١٥ تلميذاً يقرءون جريدة الأهرام، ٨ تلاميذ يقرءون الجريدتين معاً. فإذا اختير تلميذ عشوائي من هذا الفصل، احسب احتمال أن يكون التلميذ:
- ١ لا يقرأ جريدة الأخبار.
 - ٢ يقرأ جريدة الأهرام.
 - ٣ لا يقرأ جريدة الأخبار.
 - ٤ يقرأ الجريدتين معاً.

الحل



يفرض أن أ حدث قراءة جريدة الأخبار ، ب حدث قراءة جريدة الأهرام
فيكون $A \cap B$ هو حدث قراءة الجريدتين معاً.

ويكون $n(A) = 18$ ، $n(B) = 15$ ، $n(A \cap B) = 8$

الحدث أ: يقرأ جريدة الأخبار فيكون $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

لا يقرأ جريدة الأخبار حدث مكمل للحدث أ وهو \bar{A}

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

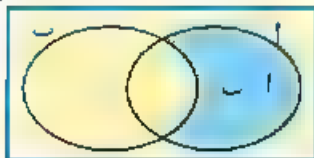
الحدث ب: يقرأ جريدة الأهرام فيكون: $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

الحدث $A \cap B$ يعني قراءة الجريدتين معاً

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

فكر هل حدث أن يقرأ جريدة الأخبار يعني حدث أن يقرأ جريدة الأخبار فقط؟ فسر إجابتك.

ف



لاحظ أن: حدث أن يقرأ جريدة الأخبار يمثل بشكل فن المقابل

بالمجموعة أ بينما حدث أن يقرأ جريدة الأخبار فقط

تعني قراءة جريدة الأخبار دون قراءة أي جريدة أخرى

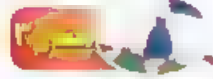
وتمثل بالمجموعة $A - B$

ونقرأ الفرق $A - B$

رابعاً: الفرق بين حدثين

إذا كان أ، ب حدثين من ف فإن $A - B$ هو حدث وقوع أ وعدم وقوع ب أي حدث وقوع أ فقط.

$$A - B = A \cap \bar{B}$$



إذا كان : A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان $L(A) = 0,7$ ، $L(A \cap B) = 0,3$
فأوجد : $L(A - B)$

الحل :

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A - B) \quad \therefore \\ \therefore L(A) &= L(A \cap B) + L(A - B) \\ \therefore 0,7 &= 0,3 + L(A - B) \\ \therefore L(A - B) &= 0,7 - 0,3 = 0,4 \end{aligned}$$



في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي فإذا كان أ هو حدث الحصول على عدد أولي ، B هو حدث الحصول على عدد أقل من ٥
فأوجد :

- (١) احتمال وقوع الحدث A فقط
- (٢) احتمال وقوع الحدث B فقط

الحل



$$\begin{aligned} F &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 6\} \end{aligned}$$

$$(1) \text{ حدث وقوع الحدث فقط } A - B = \{5\} \quad \therefore L(A - B) = 1$$

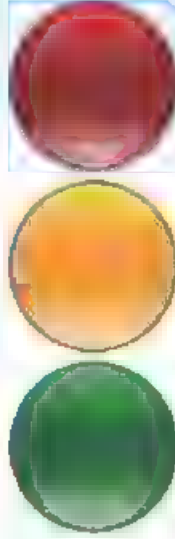
$$\text{احتمال وقوع الحدث فقط } A = L(A - B) = \frac{L(A - B)}{L(F)} = \frac{1}{6}$$

$$(2) \text{ حدث وقوع الحدث فقط } B = A - B = \{6\} \quad \therefore L(B - A) = 1$$

$$\text{احتمال وقوع الحدث فقط } B = \frac{L(B - A)}{L(F)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

الوحدة الرابعة: الدارة

الهندسة
المستوية



يجب أن يعرف سائقو السيارات دلالة
علامات المرور جيدا والتمييز بينها
ابحث في مصادر المعرفة المختلفة
(ادارة المرور - المكينة - الاسرمت ...)
عن دلالة علامات المرور





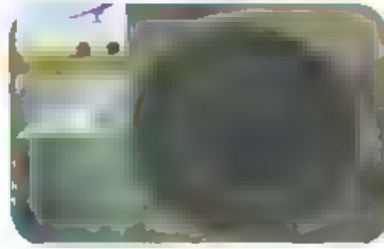
سوف نتعلم

- ☆ المفاهيم الأساسية المتعلقة بالدائرة.
- ☆ مفهوم محور التماثل في الدائرة.

مصطلحات أساسية

- ☆ دائرة
- ☆ سطح دائرة
- ☆ نصف قطر دائرة
- ☆ وتر
- ☆ قطر دائرة
- ☆ محور تماثل دائرة

مكة ٩ ساعة

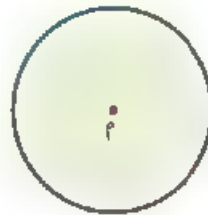


قام يوسف بتشغيل برنامج Google Earth على حاسبه الآلي لدراسة جغرافية مصر. لاحظ يوسف وجود بعض المسطحات الخضراء الدائرية الشكل بجوار المناطق الصحراوية، فسأل والده عنها.

قال الوالد: تعلم أن قطرة ماء تعني ينبوع حياة، لذلك نرشد استهلاك المياه، فنروي الأراضي بطريقة الري المحوري (ري بالرش)، وفيها تدور عجلات آلة الري حول نقطة ثابتة فت رسم هذه الدوائر.

- ١ كيف يمكنك رسم دائرة منتصف ملعب كرة القدم؟
- ٢ ما دورك في ترشيد استهلاك المياه؟

الدائرة: هي مجموعة نقط المستوى التي تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة من المستوى تسمى "مركز الدائرة" ويسمى البعد الثابت "طول نصف قطر الدائرة".



يرمز للدائرة عادة بمركزها، فنقول الدائرة م لتعني الدائرة التي مركزها النقطة م. كما في الشكل المقابل. عند رسم دائرة م في المستوى، فإنها تقسم نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط كما بالشكل، وهي.



١ مجموعة النقط داخل الدائرة

مثل النقط: م، و، هـ

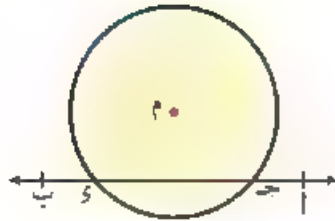
٢ مجموعة النقط على الدائرة

مثل النقط: أ، ب، ج،

٣ مجموعة النقط خارج الدائرة

مثل النقط: س، ص، ع،

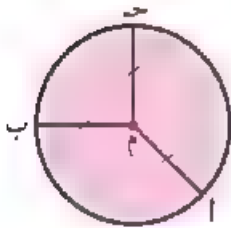
سطح الدائرة: هو مجموعة نقط الدائرة \cup مجموعة النقط داخل الدائرة.



في الشكل المقابل، لاحظ أن:

- ① $\overleftrightarrow{AB} \cap \text{الدائرة م} = \{س، ح\}$ ② $\overleftrightarrow{AB} \cap \text{سطح الدائرة م} = \overleftrightarrow{سح}$
- ③ $\text{م} \notin \text{الدائرة م}$ ، $\text{م} \in \text{سطح الدائرة م}$

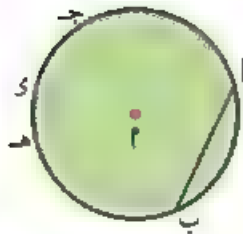
نصف قطر الدائرة: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتها) مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة.



في الشكل المقابل م أ، م ب، م جـ أنصاف أقطار للدائرة م حيث:
 $\text{م أ} = \text{م ب} = \text{م جـ} = \text{طول نصف قطر الدائرة (م)}$

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولاً نصفى قطريهما

الوتر: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتها) أى نقطتين على الدائرة



في الشكل المقابل:

ارسم جميع أوتار الدائرة التي تمر بأزواج النقط أ، ب، جـ، د، هـ

القطر: هو الوتر المار بمركز الدائرة



① أى الأوتار في الشكل المقابل قطر في الدائرة؟

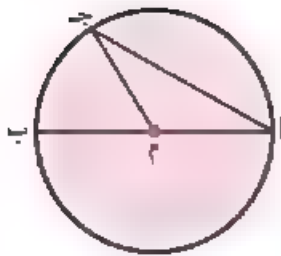
② ما عدد أقطار أى دائرة؟

③ لإثبات أن قطر الدائرة هو أكبر أوتارها طولاً:

في المثلث أ م جـ: $\text{أ م} + \text{م جـ} > \text{أ جـ}$

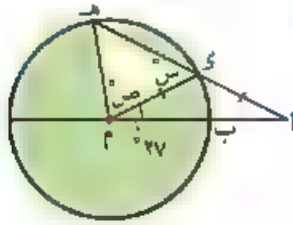
في الدائرة م: $\text{جـ م} = \text{ب م}$ (أنصاف أقطار)

فيكون: $\text{أ م} + \text{م ب} > \text{أ جـ}$ ، $\therefore \text{أ ب} < \text{أ جـ}$

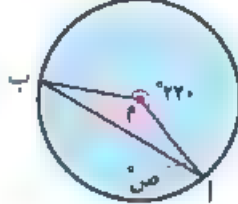




في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:



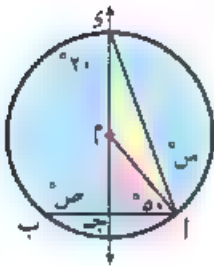
١



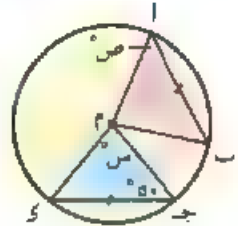
٢



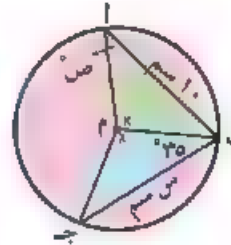
٣



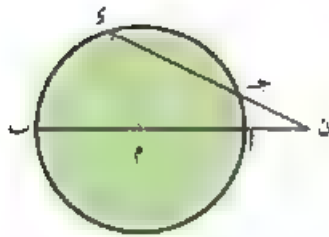
٤



٥



٦



في الشكل المقابل: \overline{AB} قطر في الدائرة م. $\overline{BA} \cap \overline{KS} = \{N\}$.
أثبت أن: $\angle B < \angle N$

الحل

نرسم نصف القطر \overline{MS} ، في $\triangle MSN$: $\angle M + \angle N + \angle S < 180^\circ$

(أنصاف أقطار)

$$\therefore \angle M = \angle N$$

$$\therefore \angle M + \angle N < 180^\circ$$

(وهو المطلوب)

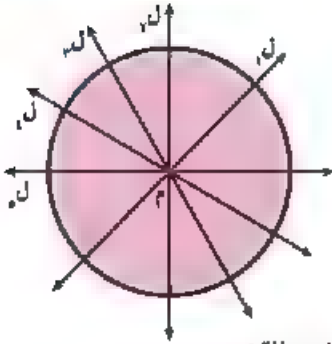
$$\therefore \angle B < \angle N$$



في المثال السابق أثبت أن: $\angle N < \angle A$.

التمائل في الدائرة

نشاط ١



- ١ ارسم الدائرة م على ورقة شفافة باستخدام الفرجار.
 - ٢ ارسم مستقيماً ل يمر بمركز الدائرة ويقسمها إلى قوسين.
 - ٣ اطو الورقة حول المستقيم ل، ماذا تلاحظ؟
 - ٤ ارسم مستقيماً آخر ل يمر بمركز الدائرة ثم اطو الورقة حوله.
- كرر العمل عدة مرات برسم المستقيمات ل، ل، ماذا تلاحظ في كل حالة؟
- من النشاط السابق نستنتج أن:

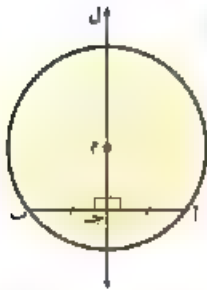
أي مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها



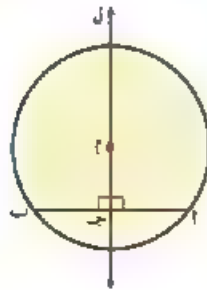
فكر ما عدد محاور التماثل في الدائرة؟

نشاط ٢

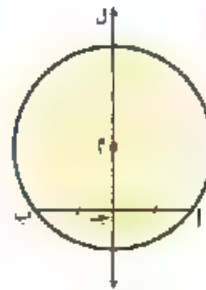
ادرس كلاً من الأشكال التالية (المعطيات كما بالرسم)، ماذا تستنتج؟



١



٢



٣

١ هل المستقيم المار بمركز الدائرة ومنتصف أي وتر فيها يكون عمودياً على هذا الوتر.

٢ هل المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر.

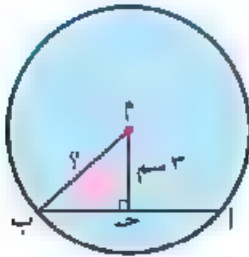
٣ هل المستقيم العمودي على أي وتر في الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة.



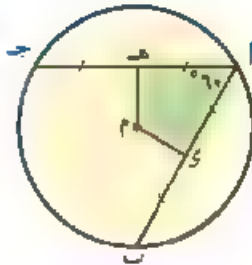
أجب في كراسة الفصل:



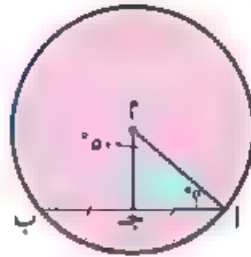
١ في كل من الأشكال الآتية م دائرة



ج



ب

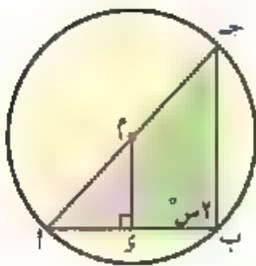


أ

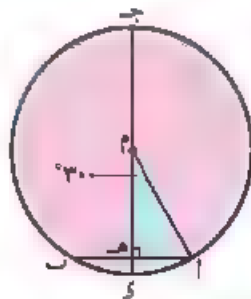
إذا كان $AB = 8$ سم
أوجد م ب

أوجد و (\angle م هـ)

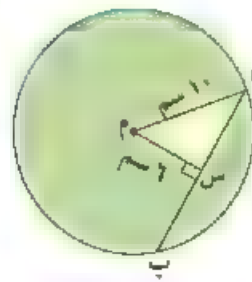
أوجد و (\angle م أ ج)



ج



ب

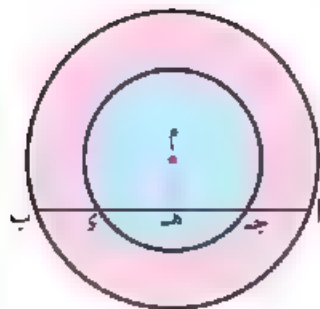


أ

أوجد قيمة س

إذا كان $AB = 10$ سم
أوجد ج و

أوجد أ ب



في الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز م، أ ب وتر في الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى في ج، و. أثبت أن: أ ج = ب و

الحل

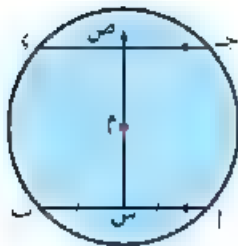
المعطيات: أ ب \cap الدائرة الصغرى = {ج، و}
المطلوب: أ ج = ب و

العمل: نرسم $\overline{م ه} \perp \overline{أ ب}$ تقطعها في هـ.

الرهان: في الدائرة الكبرى $\overline{م ه} \perp \overline{أ ب}$ $\therefore هـ أ = هـ ب$ (نتيجة (١))

في الدائرة الصغرى $\overline{م ه} \perp \overline{ج د}$ $\therefore هـ ج = هـ د$ (نتيجة (٢))
بطرح (٢) من (١) ينتج أن:

$هـ أ - هـ ج = هـ ب - هـ د$ $\therefore أ ج = ب د$ (وهو المطلوب)



في الشكل المقابل: م دائرة، $\overline{أ ب} // \overline{ج د}$ ، س منتصف $\overline{أ ب}$
رسم س م فقطع $\overline{ج د}$ في ص. **أثبت أن** س منتصف $\overline{ج د}$

الحل:

المعطيات: $\overline{أ ب} // \overline{ج د}$ ، $أ س = ب س$
المطلوب: ج ص = د ص

الرهان: \therefore س منتصف $\overline{أ ب}$

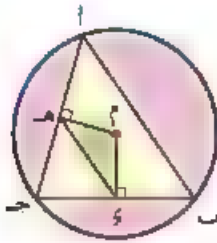
$\therefore \overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

$\therefore \overline{أ ب} // \overline{ج د}$ ، $\overline{م س}$ قاطع لهما

$\therefore \angle (أ س ص) = \angle (ب د س) = ٩٠^\circ$ بالتبادل

$\therefore \overline{م ص} \perp \overline{ج د}$

\therefore س منتصف $\overline{ج د}$ (وهو المطلوب)



في الشكل المقابل: Δ ABC مرسوم داخل دائرة مركزها O ،

$OM \perp AB$ ، $ON \perp AC$

أثبت أن: أولاً: $OM \parallel AC$

ثانياً: محيط Δ $ABC = \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$

الحل

المعطيات: $OM \perp AB$ ، $ON \perp AC$

المطلوب: أولاً: $OM \parallel AC$

ثانياً: محيط Δ $ABC = \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$

البرهان:

أولاً: $\because OM \perp AB$ $\therefore OM$ منتصف AB (١)

(٢) $\because ON \perp AC$ $\therefore ON$ منتصف AC

في Δ ABC ، OM منتصف AB ، ON منتصف AC

$\therefore OM \parallel AC$ (وهو المطلوب أولاً)

(٣) $OM = \frac{1}{2} AC$

ثانياً: من (١)، (٢)، (٣):

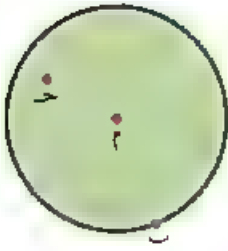
\therefore محيط Δ $ABC = OM \cdot AB + ON \cdot AC + \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AC \cdot AB + \frac{1}{2} AB \cdot AC + \frac{1}{2} BC$

$= \frac{1}{2} (AB \cdot AC + AB \cdot AC + BC)$

$= \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$

أولاً وضع نقطة بالنسبة لدائرة

فكر وناقش



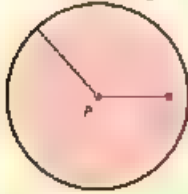
في الشكل المقابل، الدائرة م تجزئ نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط.

كيف تحدد وضع النقاط: أ، ب، ج بالنسبة للدائرة م؟

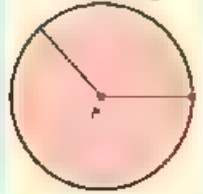
ما العلاقة بين (م، أ، ب)، (م، ب، ج)، (م، ج، ب)؟

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ب، وكانت أ نقطة في مستوى الدائرة، فإن:

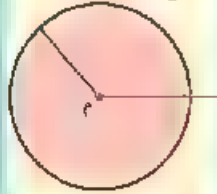
١ أ تقع خارج الدائرة ٢ أ تقع على الدائرة ٣ أ تقع داخل الدائرة



ويكون: $م > ب$
والعكس صحيح



ويكون: $م = ب$
والعكس صحيح



ويكون: $م < ب$
والعكس صحيح

لاحظ الآتي:

إذا كانت م دائرة، طول نصف قطرها = ٤ سم، أ نقطة في مستواها فإنها:

١ إذا كان: $م = ٤$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، مع ذكر السبب

٢ إذا كان: $م = ٣$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، مع ذكر السبب

٣ إذا كان: $م = ٦$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، مع ذكر السبب

٤ إذا كان: $م = ١$ سم، فأين تقع أ من الدائرة م، ماذا نلاحظ؟

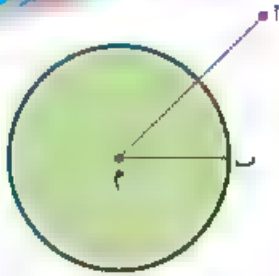


سوف تتعلم

- ☆ تحديد وضع نقطة بالنسبة لدائرة.
- ☆ تحديد وضع مستقيم بالنسبة لدائرة.
- ☆ تحديد علاقة المماس بنصف قطر الدائرة.
- ☆ تحديد وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى.
- ☆ علاقة خط المراكزين بالوتر المشترك والمماس المشترك.

مصطلحات أساسية

- ☆ نقطة تقع خارج دائرة
- ☆ نقطة تقع على دائرة
- ☆ نقطة تقع داخل دائرة
- ☆ دايرتان متباعدتان
- ☆ دايرتان متقاطعتان
- ☆ دايرتان متماسكتان
- ☆ مماس مشترك
- ☆ خط المراكزين
- ☆ وتر مشترك



إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها 5 سم، النقطة في مستوى الدائرة،
 $M = A$ س $3 - 2$ من السيمترات. **أوجد** قيم S عندما تقع A خارج الدائرة.
الحل :

∴ نقطة A تقع خارج الدائرة M ∴ $M = A$ $5 < 0$ فيكون $3 - 2 = 5$ أي أن: $2 < 8$ ∴ $S < 4$



في المثال السابق، أوجد قيمة S في الحالات التالية:

① $M = A$ س $1 + 2$ ، النقطة أعلى الدائرة. ② $M = A$ س $8 - 27$ ، النقطة داخل الدائرة.

ثانياً: وضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها 5 سم، L مستقيم في مستوىها، $M \perp L$ حيث $M \cap L = A$ ، فإن:

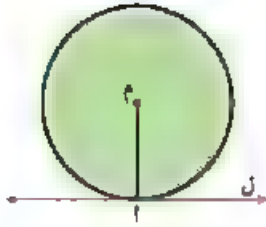
① المستقيم L يقع خارج الدائرة M $L \cap \text{الدائرة } M = \emptyset$	② المستقيم L قاطع للدائرة M $L \cap \text{الدائرة } M = \{A, B\}$	③ المستقيم L مماس للدائرة M $L \cap \text{الدائرة } M = \{A\}$
ويكون: $M = A$ $5 < 0$ والعكس صحيح	ويكون: $M = A$ $5 > 0$ والعكس صحيح	ويكون: $M = A$ $5 = 0$ والعكس صحيح

مكرر في كل من الحالات السابقة، أوجد $L \cap$ سطح الدائرة M .

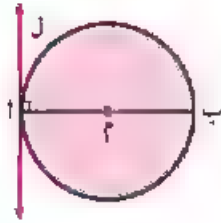
لاحظ الآتي:

إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها 5 سم، $M \perp L$ حيث $A \in L$ ، فإنه:

- ① إذا كان $M = A$ س $3 \vee 4$ فاذكر موضع المستقيم L من الدائرة M
- ② إذا كان $M = A$ س $3 \vee 4$ فاذكر موضع المستقيم L من الدائرة M
- ③ إذا كان $M = A$ س $0 = 5$ فاذكر موضع المستقيم L من الدائرة M
- ④ إذا كان المستقيم L يقطع الدائرة M ، $M = A$ س $3 - 5$ فما قيمة S ؟
- ⑤ إذا كان المستقيم L مماساً للدائرة M ، $M = A$ س $2 - 0$ فما قيمة S ؟

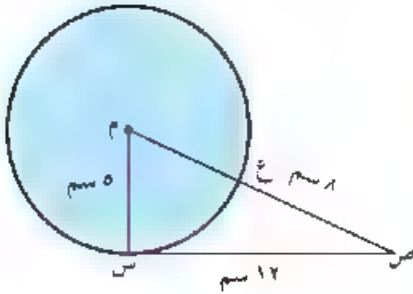


المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.



المستقيم العمودي على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً للدائرة.

كم مماساً يمكن رسمه للدائرة م؟
أولاً: من نقطة على الدائرة. ثانياً: من نقطة خارج الدائرة.
ما العلاقة بين المماسين المرسومين للدائرة من نهايتي أي قطر فيها؟



في الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم،
س ص = ١٢ سم، م ص \cap الدائرة م = {ع}، ع ص = ٨ سم.
أثبت أن: س ص مماس للدائرة م عند س.

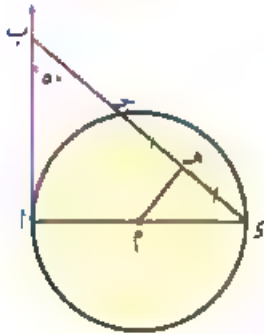
الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{م ص} \cap \text{الدائرة م} &= \{ع\} \\ \therefore \text{م ص} &= \text{س ص} = ٥ \text{ سم (أنصاف أقطار)} \\ \therefore \text{م ص} &= \text{ع ص} + \text{ع م} = ٨ + ٥ = ١٣ \text{ سم} \\ \therefore (\text{م ص})^2 &= (١٣)^2 = ١٦٩, \quad (\text{م س})^2 = (٥)^2 = ٢٥, \quad (\text{س ص})^2 = (١٢)^2 = ١٤٤ \\ \therefore (\text{م س})^2 + (\text{س ص})^2 &= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ = (\text{م ص})^2 \\ \therefore \angle \text{م س ص} &= ٩٠^\circ \quad (\text{عكس نظرية فيثاغورث}) \\ \therefore \text{س ص} &\perp \text{م ص} \\ \therefore \text{س ص} &\text{ مماس للدائرة عند س (وهو المطلوب)} \end{aligned}$$

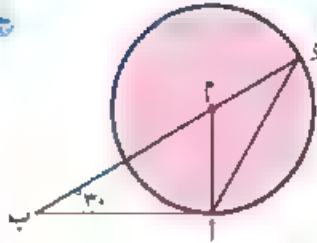
أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل:



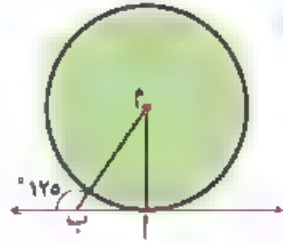
١ في كل من الأشكال الآتية، م دائرة، \overline{AB} مماس:



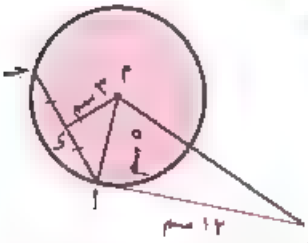
أوجد $\angle AMI$



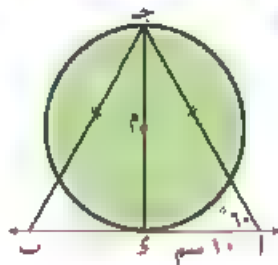
أوجد $\angle AIB$



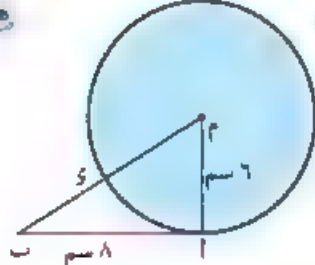
أوجد $\angle AMI$



أوجد محيط الشكل $ABMI$

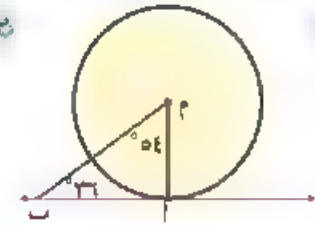
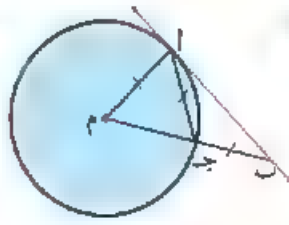
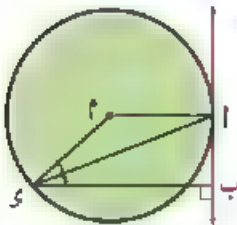


أوجد محيط $\triangle ABI$

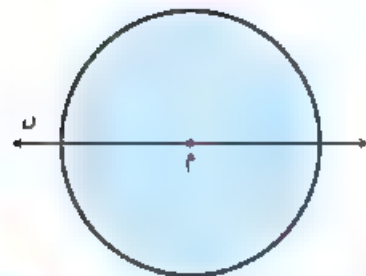


أوجد طول \overline{BI}

٢ في كل من الأشكال الآتية وضح لماذا يكون \overline{AB} مماسًا للدائرة م:



ثالثًا وضع دائرة بالمسند لدائرة أخرى



١ ارسم دائرة مركزها م بطول نصف قطر مناسب = ٥ سم.

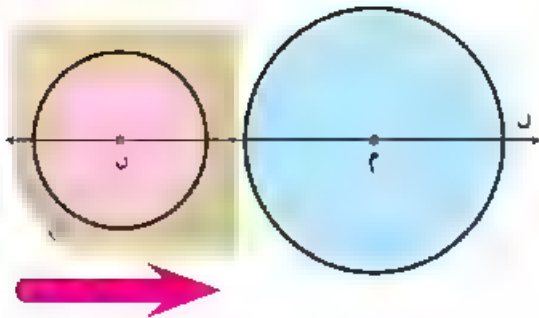
٢ ارسم أحد محاور تماثل الدائرة م وليكن المستقيم ل كما في الشكل المقابل.

٣ على ورقة شفافة،

ارسم دائرة مركزها ن بطول نصف قطر مناسب = r_1 سم حيث $r_1 > r_2$.

٤. ضع الورقة الشفافة بحيث تنتمي النقطة ن إلى المستقيم ل.

لاحظ أن المستقيم ل = \overrightarrow{MN} ويسمى \overrightarrow{MN} خط المركزين للدائرتين م، ن وهو محور تماثل لهما.



٥. حرك ورقة الشفاف نحو الدائرة م بحيث تظل

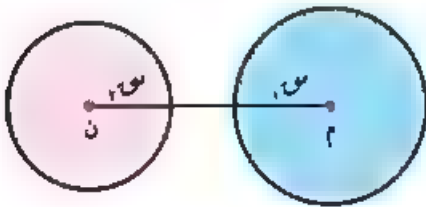
ن \in ل لتشاهد أوضاعًا مختلفة للدائرتين.

قس طول م ن في كل حالة.

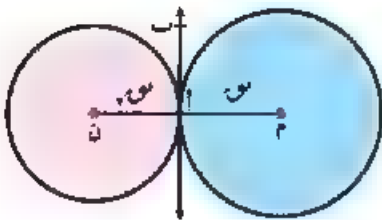
ما العلاقة بين طول م ن (البعد بين مركزي الدائرتين م، ن)، $r_1 + r_2$ أو $r_1 - r_2$ في كل وضع.

لاحظ الآتي:

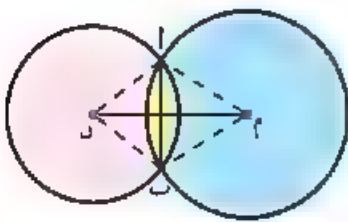
إذا كان م، ن دائرتين في المستوى، طولًا نصفى قطريهما r_1 ، r_2 على الترتيب حيث $r_1 > r_2$ فإنه:



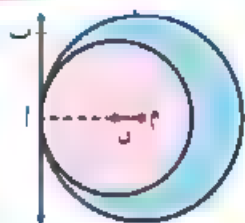
- ١ إذا كان: م ن $< r_1 + r_2$ ، فإن $M \cap N = \emptyset$.
سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = \emptyset
وتكون الدائرتان متباعدتين.



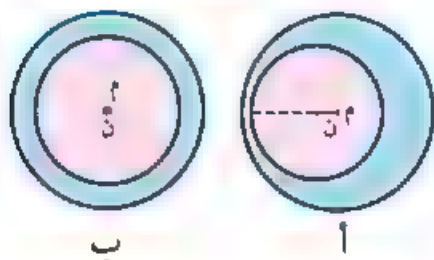
- ٢ إذا كان: م ن = $r_1 + r_2$ ، فإن $M \cap N = \{ \}$.
سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = $\{ \}$
وتكون الدائرتان متماسكتين من الخارج.



- ٣ إذا كان: $r_1 - r_2 < م ن < r_1 + r_2$ ،
فإن $M \cap N = \{ A, B \}$
سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح المنطقة الصفراء
وتكون الدائرتان متقاطعتين.



٤ إذا كان: $م = ر - ر$ ، فإن $م \cap ن = \{ \}$ ،
سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
وتكون الدائرتان متماسيتين من الداخل.



٥ إذا كان: $م > ر - ر$ ، فإن $م \cap ن = \phi$ ،
سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
وتكون الدائرتان متداخلتين كما في شكل أ
وعندما $م =$ صفر، تكون الدائرتان متحدتي المركز.
كما في شكل ب



خط المركزين لدائرتين متماسيتين يمر بنقطة التماس ويكون عمودياً على المماس المشترك عند هذه النقطة.
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه.

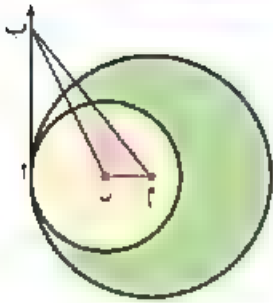


دائرتان م، ن طولاً نصفى قطريهما ٩سم، ٤سم على الترتيب، بين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى
في الحالات الآتية:

١ م ن = ٣سم	٢ م ن = ٥سم	٣ م ن = ١٣سم
٤ م ن = ١٥سم	٥ م ن = ١٠سم	٦ م ن = صفر

الحل

١. $م = ر + ر = ١٣سم$ ، $م = ر - ر = ٥سم$	٢. $م = ر + ر = ٩سم$ ، $م = ر - ر = ٤سم$
٣. الدائرتان متماستان من الخارج.	٤. م ن = ٣سم
٤. الدائرتان متماستان من الداخل.	٥. م ن = ٥سم
٥. الدائرة ن تقع داخل الدائرة م.	٦. م ن = ١٣سم
٦. الدائرتان متحدتا المركز.	٧. م ن = ٥سم
٧. $م = ر + ر > ر - ر$ ، $م = ر - ر > ر + ر$	٨. م ن = ٣سم
٨. الدائرتان متقاطعتان.	٩. م ن = صفر
٩. الدائرتان متباعدتان.	١٠. م ن = ١٠سم
	١١. م ن = ١٥سم



م، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما ١٠ سم، ٦ سم على الترتيب ومتماستان من الداخل في أ، \overline{AB} مماس مشترك لهما عند أ. إذا كانت مساحة المثلث ب م ن = ٢٤ سم^٢، **أوجد** طول \overline{AB} .

الحل:

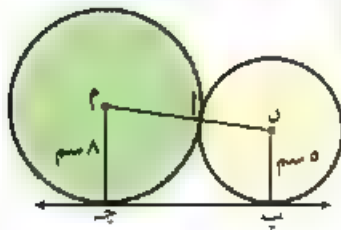
∴ الدائرتان متماستان من الداخل عند أ ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

فيكون طول \overline{AB} ارتفاعاً للمثلث ب م ن الذي قاعدته م ن حيث م ن = ١٠ - ٦ = ٤ سم (لماذا؟)
مساحة Δ ب م ن = $\frac{1}{2} \times \overline{MN} \times \overline{AB} = 24$ ∴ $\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AB} = 24$ ∴ $\overline{AB} = 12$ سم

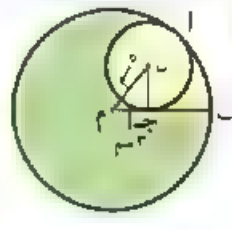
أجب عن الآتي في كراسة الفصل:

تدريب

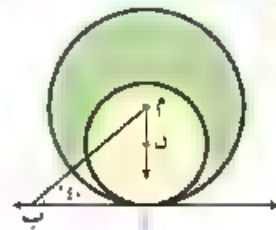
في كل من الأشكال الآتية الدوائر متماسة مثنى مثنى، باستخدام معلومات كل شكل



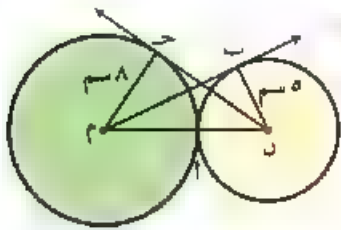
أوجد طول \overline{AB} جـ



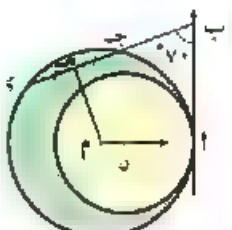
أوجد طول \overline{AB} جـ



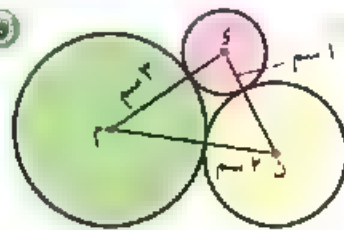
أوجد \angle ب م ن



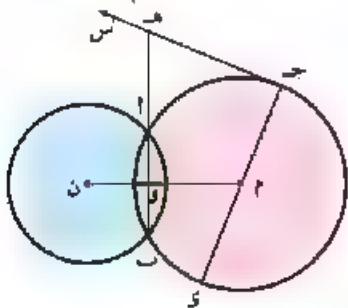
أوجد طول كل من \overline{AB} ، \overline{MN} جـ



أوجد \angle هـ م ن



أوجد \angle م و ن



مسابقات

م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، جـ و قطر في الدائرة م، جـ س مماس للدائرة م عند جـ، جـ س \cap \overline{AB} = {هـ}، $\overline{MN} \cap \overline{AB}$ = {و}، **أثبت** أن: \angle و م ن = \angle جـ هـ ب.

الحل

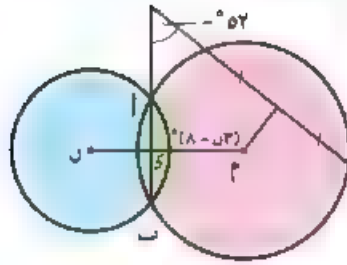
المعطيات: الدائرة م \cap الدائرة ن = (أ، ب)، جد $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م، جس مماس للدائرة م.
المطلوب: إثبات أن $\angle م ن و = \angle م ن و = \angle م ن و$ (جهد ب).
البرهان: "خط المركزين عمودى على الوتر المشترك.

$\therefore \overline{م ن} \perp \overline{أب}$ أى $\angle م ن و = \angle م ن و = 90^\circ$
 "جد $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م، جس مماس عند ج
 $\therefore \overline{جس} \perp \overline{أب}$ أى $\angle م ن و = \angle م ن و = 90^\circ$
 $\therefore \angle م ن و = \angle م ن و + \angle م ن و = \angle م ن و = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$ (لماذا؟)
 $\therefore \angle م ن و = \angle م ن و + \angle م ن و = \angle م ن و = 180^\circ$
 $\therefore \angle م ن و = \angle م ن و = \angle م ن و$ وهو المطلوب

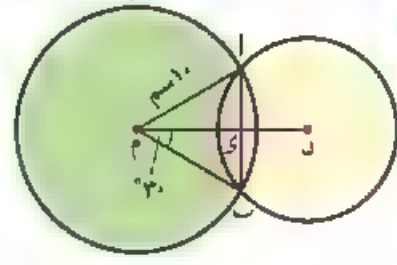


أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل:

١) فى كل من الأشكال الآتية م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب:



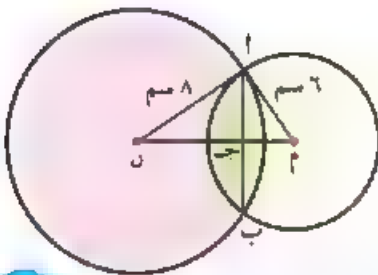
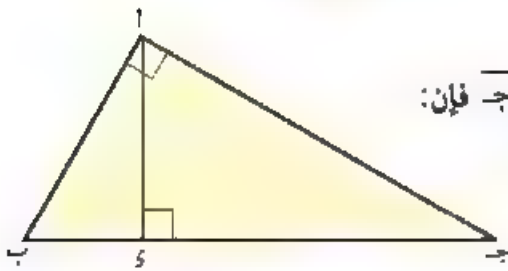
أوجد قيمة \angle



أوجد طول $\overline{أب}$

لاحظ أن:

فى المثلث $\triangle م ن و$ القائمة الزاوية فى أ إذا رسم $\overline{أى} \perp \overline{أب}$ فإن:
 (نظرية إقليدس)
 $\overline{أب}^2 = \overline{أى} \times \overline{أب}$
 ، (أى) $\times \overline{أى} = \overline{أى} \times \overline{أب}$
 ، (أى) $\times \overline{أب} = \overline{أب} \times \overline{أب}$



٢) فى الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان فى أ، ب
 $\overline{م ن} \cap \overline{أب} = \{ج\}$ ، $\overline{أم} = 6$ سم، $\overline{أن} = 8$ سم،
 $\overline{م ن} \perp \overline{أن}$.
 أوجد طول $\overline{أب}$

٩ مافش



لماذا يستخدم الفرجار في رسم الدائرة؟
ما محور القطعة المستقيمة،
هل مركز الدائرة يقع على محور أي
وتر فيها؟

كيف يمكنك رسم (تعيين) دائرة في المستوى؟

يمكن رسم (تعيين) دائرة بشروط معطاة، مهما اختلفت، إذا علم:

١- مركز الدائرة. ٢- طول نصف قطر الدائرة.

أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة.

المعطيات: نقطة معلومة في المستوى.

المطلوب: رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

الإنشاء:

١- خذ أي نقطة اختيارية مثل م في نفس المستوى.

٢- ضع سن الفرجار عند م وبفتحة تعادل م أ،

ارسم الدائرة م، نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة أ.

٣- ضع سن الفرجار عند نقطة أخرى م، وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة

م، نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة أ.

٤- كرر العمل السابق

لاحظان: لكل نقطة من المتيار (مركز الدائرة) أمكن

رسم دائرة تمر بالنقطة أ



☆ كيفية رسم دائرة تمر

بنقطة معلومة.

☆ كيفية رسم دائرة تمر

بنقطتين معلومتين.

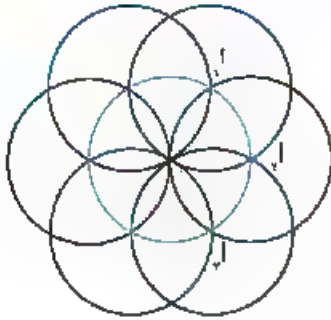
☆ كيفية رسم دائرة تمر

بثلاث نقاط معلومة.

مصطلحات أساسية

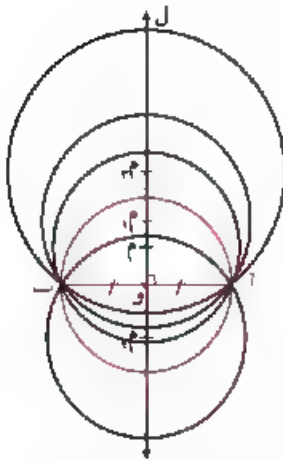
☆ دائرة خارجة لمثلث.

كم عدد نقاط المستوى؟ كم عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بالنقطة أ؟
إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية في الطول، أين تقع مراكزها؟



مما سبق نستنتج أن:

1. يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل أ.
2. إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية في الطول، فإن مراكزها تقع على دائرة مطابقة لهم ومركزها النقطة أ.



ثانياً: رسم دائرة تمر بمقتنين معلومين

المعطيات: أ، ب نقطتان معلومتان في المستوى.
المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقطتين أ، ب أي أن \overline{AB} وتر في الدائرة م.
الافتراض:

1. ارسم القطعة المستقيمة \overline{AB} .
2. ارسم المستقيم ل محور \overline{AB} حيث $L \cap \overline{AB} = \{O\}$ (مركز الدائرة يقع على محور الوتر \overline{AB}).
3. خذ أي نقطة اختيارية م حيث $M \in L$ ، اركز بسن الفرجار في م وبفتحه تعادل م أ ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطة ب.
4. ضع سن الفرجار في نقطة أخرى مثل م، حيث $M \in L$ ، وبفتحه تعادل م أ ارسم الدائرة م، حيث تمر بالنقطة ب.
5. كرر العمل السابق ولاحظ:

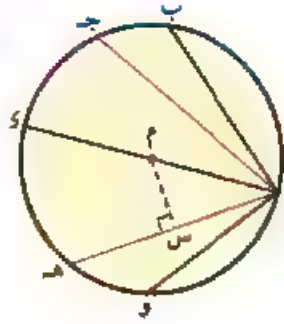
لكل نقطة من الخيال (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين أ ب

- كم عدد نقاط المستقيم ل؟ كم عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بالنقطتين أ، ب؟
- ما طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ، ب؟
- هل يمكن أن تتقاطع دائرتان في أكثر من نقطتين؟



سوف نعلم

- ☆ استنتاج العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها.
- ☆ حقيقة حل مسائل على العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها



9 ناقض

في الشكل المقابل:

انقطة على الدائرة م، رسمت فيها الأوتار أب، احد، إي، أه، أو.

١ ما العلاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة؟

٢ إذا تساوت الأوتار في الطول، ماذا تستنتج؟

٣ إذا تساوت أبعاد الأوتار عن مركز الدائرة ماذا تتوقع؟

لاحظ أن:

بُعد الوتر أه، عن مركز الدائرة م = م س حيث س منتصف الوتر أه، في الدائرة م التي طول نصف قطرها هو.

فيكون: $(م س)^2 + (أ س)^2 = (أ م)^2 = م س^2$ (مقدار ثابت)

أي أن:

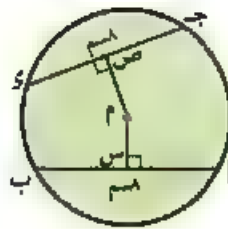
كما اختلفت الوتر من مركز الدائرة زاد طوله والعكس صحيح

مصطلحات أساسية

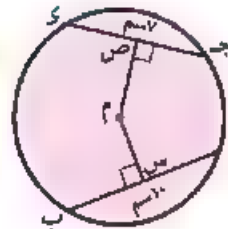
- ☆ أوتار متساوية
- ☆ بوادر متطابقة



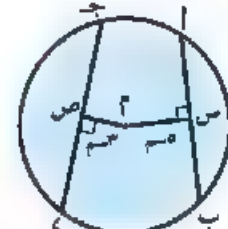
١ أكمل باستخدام (<، >، =):



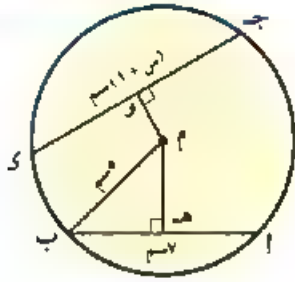
م س = م ص



م س > م ص



أ ب > ج د

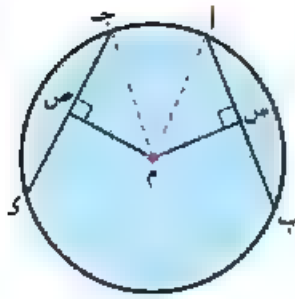


٢) في الشكل المقابل م و > م هـ أوجد الفترة التي تنتمي إليها س:

- $\therefore م و > م هـ$
 $\therefore س + ١ < ٧$
 $\therefore جى وتر في الدائرة م$
 $\therefore س \geq ٩$
 $\therefore جى < ٦$
 $\therefore جى \geq ١٠$
 ويكون $٩ \geq س > ٦$
 أي أن: $س \in [٦, ٩]$

نظرية

الأوتار المتساوية الطول في دائرة على أنغام متساوية من مركزها.



المعطيات: $أب = جى$ ، $م س \perp أب$ ، $م ص \perp جى$.

المطلوب: إثبات أن $م س = م ص$.

العمل: نرسم $م أ$ ، $م ج$.

البرهان: $\therefore م س \perp أب$

$$\therefore اس = \frac{١}{٢} أب$$

$$\therefore جص = \frac{١}{٢} جى$$

$$\therefore اس = جص$$

$$\therefore م ص \perp جى$$

$$\therefore أب = جى$$

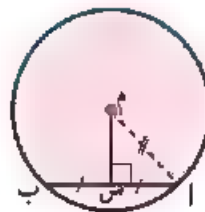
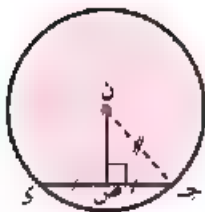
\therefore المثلثين $اس م$ ، $جص م$ ، فيهما:

$$\left. \begin{array}{l} ام = جم \\ ق (\Delta اس م) = ق (\Delta جص م) = ٩٠^\circ \\ اس = جص \end{array} \right\} \text{ (برهاناً)}$$

(وهو المطلوب)

$$\therefore \Delta اس م \equiv \Delta جص م \text{ وينتج أن: } م س = م ص$$

الأوتار المتساوية الطول في الدوائر المتطابقة على أنغام متساوية من مراكزها



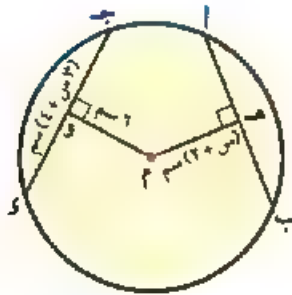
في الشكل المقابل:

الدائرتان م، ن متطابقتان، $أب = جى$ ، $م س \perp أب$ ،

$ن ص \perp جى$ ، فإن: $م س = ن ص$.



ادرس الشكل ثم أوجد المطلوب:

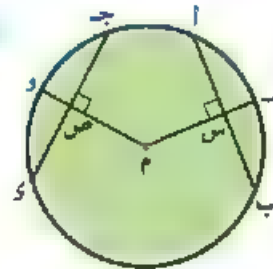


ب إذا كان:

أب = جد
فأوجد كل من:
قيمة م، طول جد
الحل

$$\begin{aligned} \because \text{م هـ} &= 6 \\ \therefore \text{م ص} &= 6 \\ \therefore \text{س} &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{جد} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$



ب إذا كان:

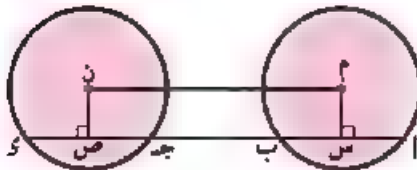
أب = جد

اثبت أن: هـ س = و ص
الحل

$$\because \text{م س} = \text{م ص} \quad (1)$$

$$\because \text{م هـ} = \text{م و} \quad (2)$$

$$\therefore \text{هـ س} = \text{و ص}$$



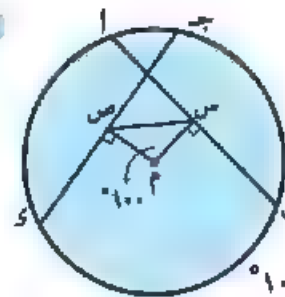
ب إذا كان: م، ن دائرتين متطابقتين، أب = جد

فأثبت الشكل م س ص ن مستطيل

$$\text{الحل: } \overline{\text{م س}} \parallel \overline{\text{ن ص}}, \overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أب}}$$

$$\text{م س} = \text{ن ص}$$

\therefore الشكل م س ص ن مستطيل



ب إذا كان:

أب = جد

فأوجد: ق (م س ص)

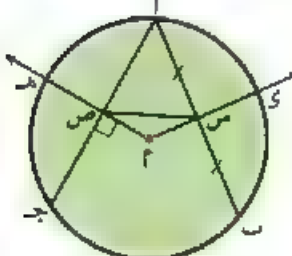
الحل: م س = م ص

في \triangle م س ص

$$\therefore \text{ق} = (\angle \text{م س ص}) = 100^\circ$$

$$\therefore \text{ق} = (\angle \text{م س ص}) + \text{ق} = (\angle \text{م ص س}) = 80^\circ$$

$$\therefore \text{ق} = (\angle \text{م س ص}) = 2 \div 80 = 40^\circ$$



أب، أجد وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س منتصف أب، م س

يقطع الدائرة في ر، م ص \perp أجد يقطعه في ص ويقطع الدائرة في هـ.

اثبت أن: أولاً: س ر = ص هـ.

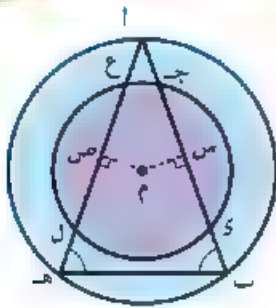
ثانياً: ق (ب س ب) = ق (س ص ج)

المعطيات: أب = أجد س منتصف أب، م ص \perp أجد

المطلوب: إثبات أن:

أولاً: س ر = ص هـ

ثانياً: ق (ب س ب) = ق (س ص ج)



٥ دائرتان متحدتا المركز م، رسم \overline{AB} وترًا في الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى في ج، د، ورسم \overline{AH} وترًا في الدائرة الكبرى أيضًا فقطع الدائرة الصغرى في ع، ل. إذا كان $\angle(ABH) = \angle(ABD)$ ، فاثبت أن: $\angle C = \angle L$.

العمل -

المعطيات: $\angle(ABH) = \angle(ABD)$

المطلوب: إثبات أن $\angle C = \angle L$

العمل: نرسم $M \perp AB$ ، $M \perp AH$

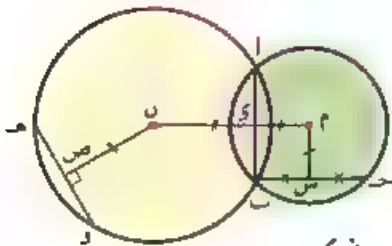
البرهان: في $\triangle ABH$: $\angle(ABH) = \angle(ABD)$ $\therefore AB = AH$

في الدائرة الكبرى: $\therefore AB = AH$ (برهانًا)

في الدائرة الصغرى: $\therefore M \perp CH$ (برهانًا)

$\therefore \angle C = \angle L$ (عكس النظرية)

(وهو المطلوب)



٦ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب،

$\overline{MN} \cap \overline{AB} = \{K\}$ ، س منتصف \overline{AB} ، ج، ن \perp هـ و،

$M \perp$ م س = م ي، ن ص = ن ي، اثبت أن: $\angle B = \angle D$ هـ و.

العمل -

المعطيات: س منتصف \overline{AB} ، ن ص \perp هـ و، م س = م ي، ن ص = ن ي.

المطلوب: إثبات أن: $\angle B = \angle D$ هـ و

البرهان: $\therefore \overline{MN}$ خط المركزين، \overline{AB} وتر مشترك للدائرتين م، ن. $\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$

في الدائرة م: \therefore س منتصف \overline{AB} $\therefore M \perp$ م س \perp ب ج

$\therefore M \perp$ م س \perp ب ج ، $M \perp$ م ي \perp أ ب ، م س = م ي

$\therefore \angle B = \angle D$ (عكس النظرية) (١)

في الدائرة ن: \therefore ن ص \perp هـ و ، ن ي \perp أ ب ، ن ص = ن ي

$\therefore \angle B = \angle D$ (عكس النظرية) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\angle B = \angle D$ (وهو المطلوب)

مكرر إذا كانت م، ن دائرتين متطابقتين ومتقاطعتين في أ، ب؛ فهل \overline{AB} محور م ن؟

فسر إجابتك.

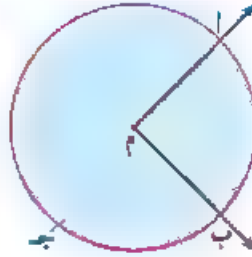
الوحدة الخامسة: الزوايا والأقواس في الدائرة

الهندسة



مكرر 9 ناعش

في الشكل المقابل:

ضلعا \angle أ م ب يقسمان الدائرة م إلى قوسين:① القوس الأصغر أ ب، ويرمز له بالرمز $\widehat{أ ب}$.② القوس الأكبر أ ج ب، ويرمز له بالرمز $\widehat{أ ج ب}$.

سوف نتعلم

- ☆ مفهوم طول القوس
- ☆ مفهوم قياس القوس
- ☆ كيفية إيجاد العلاقة بين أوتار في الدائرة وأقواسها

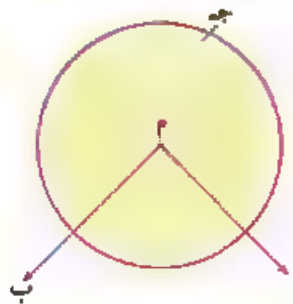
مصطلحات أساسية

- ☆ زاوية مركزية.
- ☆ زاوية محيطية.
- ☆ قوس.
- ☆ قوسان متجاوران.
- ☆ قياس قوس.
- ☆ وتر.
- ☆ مماس.

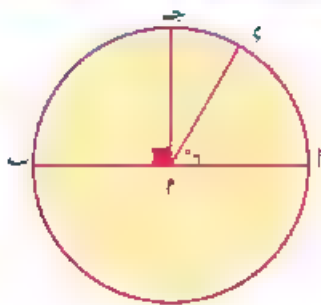
◆ ما موقع نقط $\widehat{أ ب}$ بالنسبة إلى \angle أ م ب؟◆ ما موقع نقط $\widehat{أ ج ب}$ بالنسبة إلى \angle أ م ب المنعكسة؟◆ إذا كانت \angle أ م ب زاوية مستقيمة ماذا تلاحظ؟

الزاوية المركزية هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة، ويحمل كل من ضلعيها نصف قطر في الدائرة

في الشكل المقابل لاحظ أن:

① \angle أ م ب المركزية يقابلها $\widehat{أ ب}$ ، $\widehat{أ ج ب}$ يقابل \angle أ م ب المركزية المنعكسة.② إذا كانت \angle أ م ب زاوية مستقيمة(أ ب قطر في الدائرة م) فإن $\widehat{أ ب}$ يطابق $\widehat{أ ج ب}$ ويسمى كل منهما "نصف دائرة"

قياس القوس هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له.



في الشكل المقابل

AB قطر في الدائرة م، م جـ ⊥ AB، و (أ م د) = 60°

لاحظ أن :

① و (أ) = و (أ م د) = 60°

② و (ب) = و (أ م د) = 90°

(المعاد)

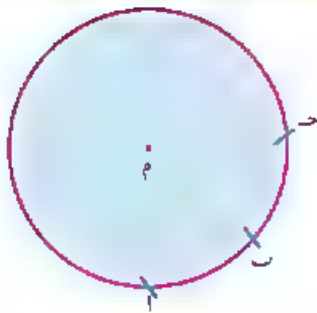
③ و (أ ب) = و (أ م د) = 30°

④ و (أ ب) = و (أ م د) = 180°

أي أن قياس نصف الدائرة = 180° ويكون قياس الدائرة = 360°

هما قوسان من دائرة يشتركان في نقطة واحدة فقط

القوسان المتجاوران

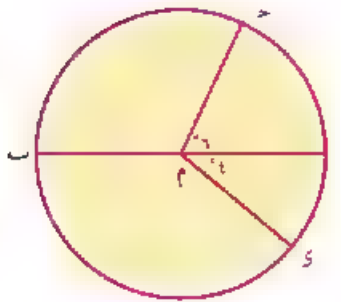


مثل AB، ب جـ بالشكل المقابل:

ويكون :

و (أ ب) + و (ب جـ) = و (أ ب جـ)

و (أ ب) - و (أ ب جـ) = و (ب جـ)



في الشكل المقابل:

AB قطر في الدائرة م، و (أ م د) = 60°، و (أ م ب) = 40°

لاحظ أن :

① و (أ) = و (أ م د) = 40°

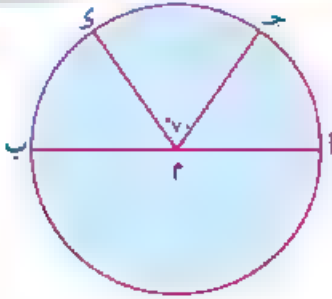
② و (أ ب) = و (أ م د) + و (ب م د) = 100°

100° = 40° + 60°

③ و (ب جـ) = و (أ ب جـ) - و (أ ب) = 180° - 60° - 40° = 80°

④ و (أ ب جـ) = قياس الدائرة - و (أ ب) = 360° - 40° = 320°

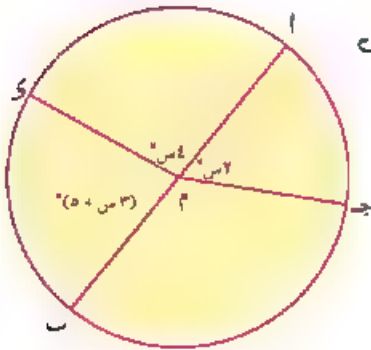
(المعاد؟)



أب قطر في الدائرة م، و $\angle \text{جم ي} = 70^\circ$ ،
و (أ ج) : و (ي ب) = 6 : 5 أوجد و (أ ج ي).

الحل

بفرض أن و (أ ج) = 5س و (ي ب) = 6س
 \therefore و (أ ي ب) = و (أ ج) + و (ج ي) + و (ي ب) = 180°
 \therefore 5س + 70 + 6س = 180 \therefore 11س = 110 \therefore س = 10
 و (أ ج) = 50 \therefore و (أ ج ي) = و (أ ج) + و (ج ي) = 120°



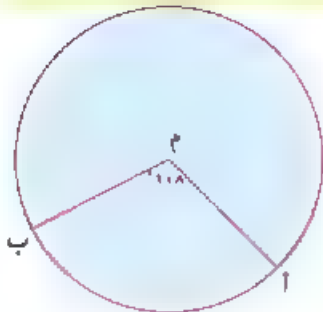
في الشكل المقابل: أب قطر في الدائرة م، ادرس الشكل ثم لاحظ ان

- | | |
|-------------------|------------------|
| ① س = 45 | ② و (أ ج) = 50 |
| ③ و (أ ي) = 100 | ④ و (ب ج) = 130 |
| ⑤ و (ج أ ي) = 150 | ⑥ و (ج ب ي) = 40 |
| ⑦ و (أ ج ي) = 60 | ⑧ و (أ ي ج) = 30 |

هو جزء من محيط دائرته يتناسب مع قياسه حيث:

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} \times \text{محيط الدائرة}$$

طول القوس



في الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها 5 سم، و (أ ب) = 108° .

أوجد طول أ ب $(3, 14 = \pi)$

الحل

$$= \frac{108}{360} \times 2 \times 3,14 \times 5 = 9,42 \text{ سم}$$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} \times \text{محيط الدائرة}$$



أجب عن الأتي في كراسة الفصل:

في الشكلي المقابل: دائرتان متحدتا المركز طول نصف قطر الدائرة الصغرى

٧ سم وطول نصف قطر الدائرة الكبرى ١٤ سم ($\frac{22}{7} = \pi$)

أثبت أن: $(\widehat{AB}) = (\widehat{CD})$ ، $\widehat{HO} = \widehat{SO}$

الحل:

في الدائرة الصغرى:

$$\widehat{HO} = (\widehat{AB}) = \widehat{CD} = 50^\circ$$

$$\text{طول } \widehat{AB} = 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{55}{9} \text{ سم}$$

$$\text{طول } \widehat{CD} = 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{55}{9} \text{ سم}$$

$\therefore \widehat{AB} \text{ يطابق } \widehat{CD}$

في الدائرة الكبرى:

$$\widehat{HO} = \widehat{SO} = (\widehat{CD}) = 50^\circ$$

$$\text{طول } \widehat{HO} = 14 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{110}{9} \text{ سم}$$

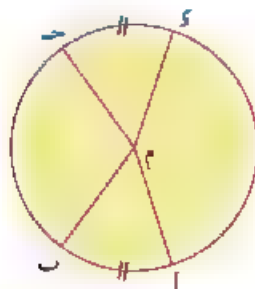
$\therefore \widehat{HO} \text{ يطابق } \widehat{SO}$

$$\text{طول } \widehat{SO} = 14 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{110}{9} \text{ سم}$$

- هل \widehat{AB} يطابق \widehat{HO} ؟ ماذا تستنتج؟

بناش هامه

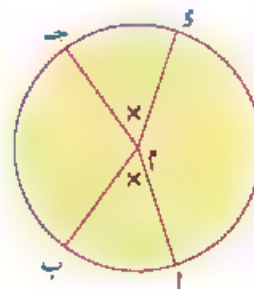
في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المنطابقة، الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول، والعكس صحيح.



والعكس

إذا كان: $\text{طول } \widehat{AB} = \text{طول } \widehat{CD}$

فإن: $\widehat{HO} = \widehat{SO}$

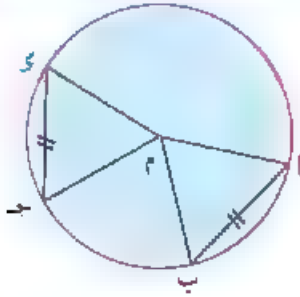


في الدائرة م

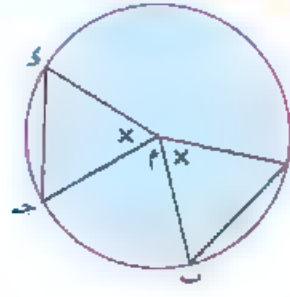
إذا كان $\widehat{HO} = \widehat{SO}$ (\widehat{CD})

فإن: $\text{طول } \widehat{AB} = \text{طول } \widehat{CD}$

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة) ، الأقواس المتساوية في القياس أو أوتارها متساوية في الطول ، والعكس صحيح



والعكس



في الدائرة م

إذا كان : $\overline{AB} = \overline{CD}$

فإن : $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

إذا كان : $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

فإن : $\overline{AB} = \overline{CD}$

أجب في كراسة الفصل



في الشكل المقابل إذا كان :

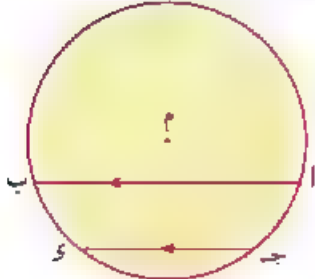
$\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 80^\circ$ ،

$\widehat{A} = 70^\circ$ ، $\widehat{C} = 40^\circ$

١) اذكر الأقواس المتساوية في القياس .

٢) اذكر الأقواس المتساوية في الطول .

٣) ارسم الأوتار المتساوية في الطول



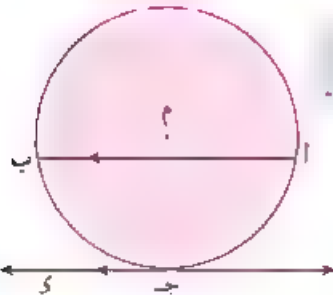
الوتران المتواريان في الدائرة بهضمان قوسين متساويين في القياس .

إذا كان \overline{AB} ، وترين في الدائرة م ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

فإن $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

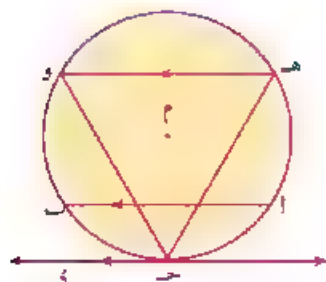
القوسان المحصوران بين وترين مماسين

بوازيه في الدائرة متساويان في القياس .



إذا كان \overline{AB} وترًا في الدائرة م ، \overline{CD} مماسًا عند ج ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

فإن $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



في الشكل المقابل:

م دائرة، جد مماس للدائرة عند جـ، \overline{AB} ، \overline{HO} وتران في الدائرة حيث:

$$\overline{AB} \parallel \overline{HO} \text{ و } \overline{JO} \parallel \overline{JO}$$

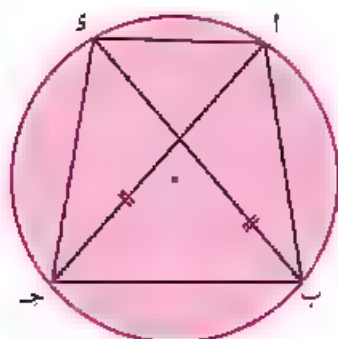
أثبت أن: جـه = جـو

الحل:

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{HO} \quad \therefore \widehat{AOH} = \widehat{BOH} \quad (1)$$

$$\therefore \text{المماس } \overline{JO} \parallel \overline{AB} \quad \therefore \widehat{JOA} = \widehat{JOB} \quad (2)$$

بجمع طرفي (1)، (2) $\therefore \widehat{AOH} = \widehat{BOH} \quad \therefore \widehat{JOA} = \widehat{JOB} \quad \therefore \text{جـه} = \text{جـو}$



في الشكل المقابل:

أ ب جد شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه أ جـ = ب د،

$$\text{أ ب} = (5 - 3) \text{ سم، جـ د} = (3 + 5) \text{ سم.}$$

أوجد بالبرهان طول أ ب.

الحل:

المعطيات: أ ب جد شكل رباعي مرسوم داخل دائرة،

$$\text{أ جـ} = \text{ب د، أ ب} = (5 - 3) \text{ سم، جـ د} = (3 + 5) \text{ سم}$$

المطلوب: إيجاد طول أ ب.

البرهان: $\therefore \text{أ جـ} = \text{ب د}$ معطى

$$\therefore \widehat{AOB} = \widehat{COD} \quad (1)$$

$$\therefore \widehat{AOB} - \widehat{COB} = \widehat{COD} - \widehat{COB} \quad (2)$$

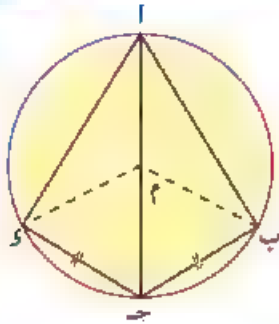
$$\therefore \widehat{AOB} = \widehat{COD} \quad (3)$$

$$\therefore \text{أ ب} = \text{جـ د} \quad (4)$$

$$5 - 3 = 3 + 5 \quad (5)$$

$$\therefore \text{أ ب} = 5 - 3 = 2 \quad (6)$$

$$\therefore \text{أ ب} = 5 - 3 = 2 \quad (7)$$



في الشكلي المقابل:

أ ب ج د شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ دائرةٍ م، أ ج قطر في الدائرة،
ج ب = ج د **أثبت أن:** $\widehat{أ} = \widehat{ب} = \widehat{د}$

الحل:

المعطيات: أ ج قطر في الدائرة، ج ب = ج د

المطلوب: $\widehat{أ} = \widehat{ب} = \widehat{د}$

البرهان: \therefore ج ب = ج د

$$\therefore \widehat{أ} = \widehat{ب} = \widehat{د} \quad \text{①} \quad \text{—————}$$

\therefore أ ج قطر في الدائرة

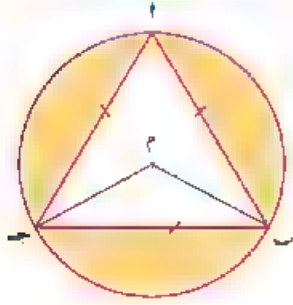
$$\therefore \widehat{أ} = \widehat{ب} = 180^\circ - \widehat{د} \quad \text{②} \quad \text{—————}$$

$$\therefore \widehat{أ} = \widehat{ب} = 180^\circ - \widehat{د} \quad \text{③} \quad \text{—————}$$

من ①، ② ينتج أن:

$$\widehat{أ} = \widehat{ب} = \widehat{د}$$

فكر ٩ ناقش



في الشكل المقابل:
الدائرة م تمر برؤوس المثلث أ ب ج
المتساوي الأضلاع
♦ ما قياس \angle ب م ج المركزية؟

فسر إجابتك

♦ ما رأس \angle ب أ ج؟

هل ينتمي رأس الزاوية إلى مجموعة نقط الدائرة م؟

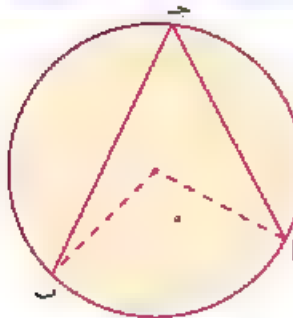
♦ ما ضلع \angle ب أ ج؟

♦ إذا كانت \angle ب م ج مركزية قوسها ب ج، فكيف تصف \angle ب أ ج؟

♦ قارن بين \angle (ب أ ج)، و \angle (ب م ج). ماذا تلاحظ؟

الزاوية هي الزاوية التي رأسها على الدائرة، ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا في الدائرة.

الزاوية
المحيطة



في الشكل المقابل: لاحظ أن:

① \angle أ ج ب زاوية محيطة ويكون \widehat{AB} هو القوس المقابل لها.

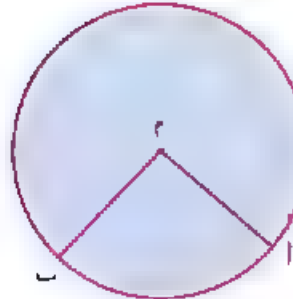
② لكل زاوية محيطة توجد زاوية مركزية واحدة تشترك معها في القوس.



في الشكل المقابل

ما عدد الزوايا المحيطة التي تشترك

مع \angle أ م ب المركزية في \widehat{AB} ؟
(وضح إجابتك بالرسم)



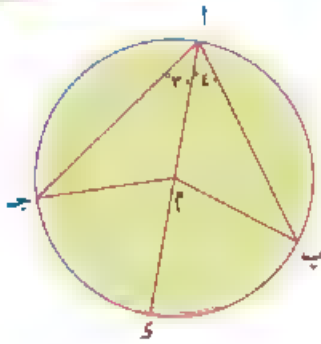
سوف تتعلم

☆ كيفية استنتاج العلاقة بين
قياس الزاويتين المحيطة
والمركزية المشتركتين في
القوس.

مصطلحات أساسية

☆ زاوية مركزية.

☆ زاوية محيطة



نشاط في الشكل المقابل

أر قطر في الدائرة م. ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

- ١ اذكر زوجين من الزوايا المتساوية في القياس.
- ٢ إذا كان $\angle AOB = 40^\circ$ ، أوجد $\angle AOC$.
- ٣ إذا كان $\angle AOC = 30^\circ$ ، أوجد $\angle AOB$.
- ٤ قارن بين $\angle AOB$ و $\angle AOC$ ، و $\angle AOB$ و $\angle AOC$. ماذا تستنتج ؟

قياسُ الراوية المحيطية يساوي نصف قياس الراوية المركزية
المشتركة معها في القوس.

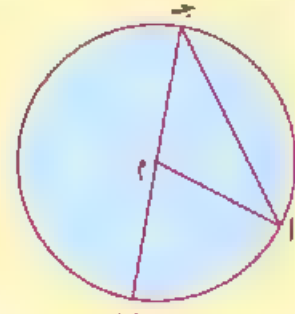
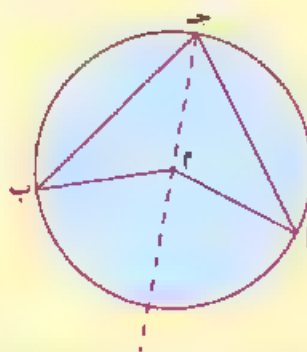
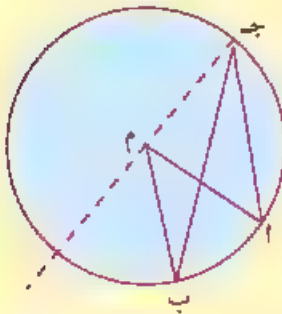
نظرية

المعطيات: $\triangle ABC$ زاوية محيطية، $\triangle AOB$ زاوية مركزية.

المطلوب: إثبات أن $\angle AOB = 2 \angle ACB$.

البرهان: توجد ثلاث حالات لإثبات صحة النظرية.

- ١ إذا كانت م تنتمي إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية.
- ٢ إذا كانت م نقطة داخل الزاوية المحيطية.
- ٣ إذا كانت م نقطة خارج الزاوية المحيطية.



الحالة الأولى إذا كانت م تنتمي إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية

$\therefore \triangle AOB$ خارجي عن $\triangle ABC$

$\therefore \angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

$\therefore \angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (أطوال أنصاف أقطار)

من ١، ٢ يتبع أن $\angle AOB = 2 \angle ACB$

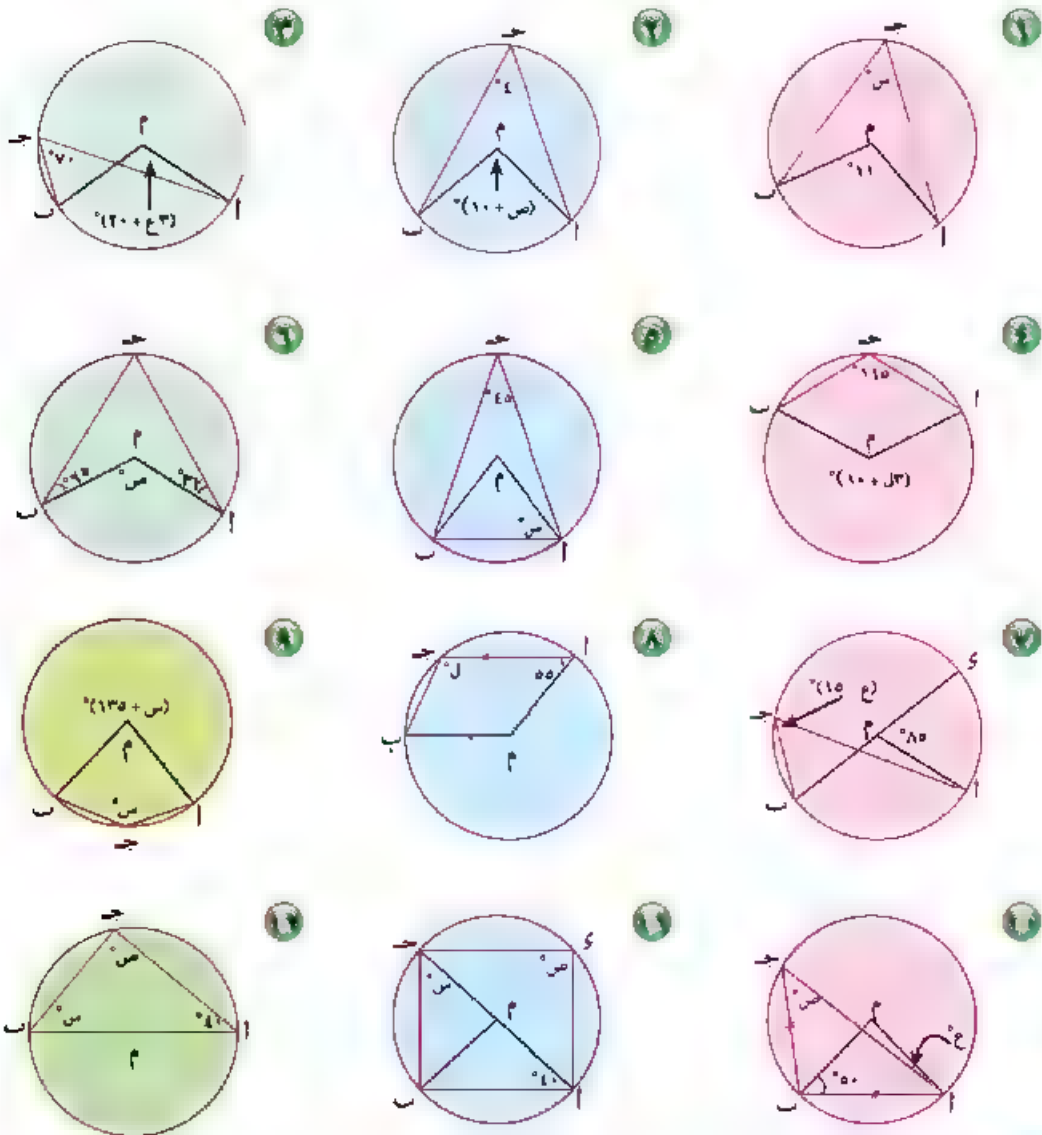
$\therefore \angle AOB = 2 \angle ACB$ (وهو المطلوب)

مشاط

برهن صحة النظرية في الحالتين الآخرين .



في كلٍّ من الأشكال الآتية، م دائرة، أوجد قيمة الرمز المجهول المستخدم في القياس :
(س، ص، ع، ل).



ان نقطة خارج الدائرة م، \overrightarrow{AB} مماس للدائرة عند ب، \overrightarrow{AM} قطع الدائرة م في ج، \angle على الترتيب،
وهـ $(\angle) = 40^\circ$. **أوجد** بالبرهان وهـ $(\angle ب ج س)$.

الحل

المعطيات: \overrightarrow{AB} مماس للدائرة عند ب، وهـ $(\angle) = 40^\circ$ ، \overrightarrow{AM} قطع الدائرة م في ج، \angle .

المطلوب: وهـ $(\angle ب ج س)$

العمل: نرسم نصف القطر \overrightarrow{MB}

البرهان: $\therefore \overrightarrow{AB}$ مماس للدائرة عند ب، \overrightarrow{MB} نصف قطر.

\therefore وهـ $(\angle ا ب م) = 90^\circ$
في $\triangle ا ب م$:

\therefore وهـ $(\angle) = 40^\circ$ ، وهـ $(\angle ا ب م) = 90^\circ$

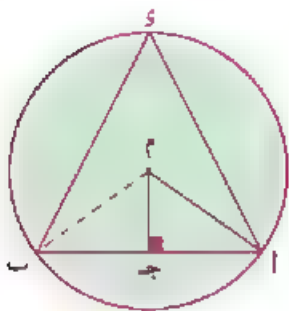
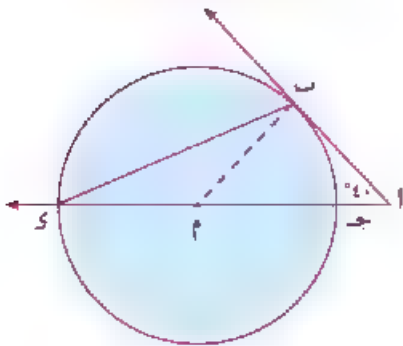
\therefore وهـ $(\angle ب م ج) = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$

$\therefore \angle ب ج س$ المحيطية، $\angle ا ب م$ جـ المركزية مشتركتان في $\widehat{ب ج}$.

\therefore وهـ $(\angle ب ج س) = \frac{1}{2} \times (\angle ا ب م ج)$

\therefore وهـ $(\angle ب ج س) = \frac{1}{2} \times 50 = 25^\circ$

(وهو المطلوب)



١

٢

في الشكل المقابل: \overrightarrow{AB} وتر في الدائرة م، $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ج د}$.

اثبت أن: وهـ $(\angle ا م ج) =$ وهـ $(\angle ا ب ج)$

الحل

نرسم $\overrightarrow{ب م}$ ، في $\triangle ا ب م$:

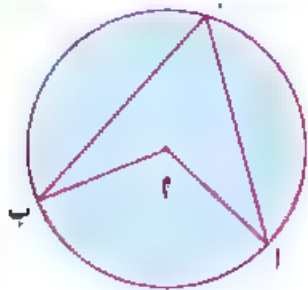
$\therefore \angle ا م ب = \angle ا ب م$ ، $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ب ج}$

\therefore وهـ $(\angle ا م ج) =$ وهـ $(\angle ا ب م ج) = \frac{1}{2} \times (\angle ا م ب)$

$\therefore \angle ا ب ج$ المحيطية، $\angle ا م ب$ المركزية مشتركتان في $\widehat{ا ب}$

\therefore وهـ $(\angle ا ب ج) = \frac{1}{2} \times (\angle ا م ب)$

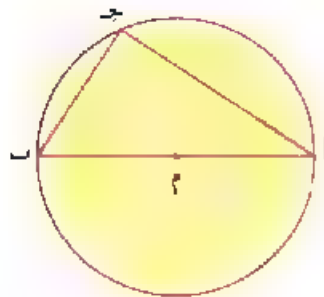
من (١)، (٢) ينتج أن: وهـ $(\angle ا م ج) =$ وهـ $(\angle ا ب ج)$.



قياس الزاوية المحيطية يساوى
نصف قياس القوس المقابل لها

فى الشكل المقابل:

$$\begin{aligned} \text{و } (\angle ج) &= \frac{1}{2} \text{ و } (\angle أ ب), \text{ و } (\angle أ ب) = (\angle أ ب) \\ \therefore \text{ و } (\angle ج) &= \frac{1}{2} \text{ و } (\angle أ ب) \end{aligned}$$



الزاوية المحيطية المرسومة
فى نصف دائرة قائمة

أى أن:

إذا كان القوس المقابل للزاوية المحيطية يساوى نصف الدائرة

$$\text{فإن: و } (\angle ج) = \frac{1}{2} \text{ و } (\angle أ ب)$$

$$\therefore \text{ و } (\angle ج) = 90^\circ$$

$$\therefore \text{ و } (\angle أ ب) = 180^\circ$$

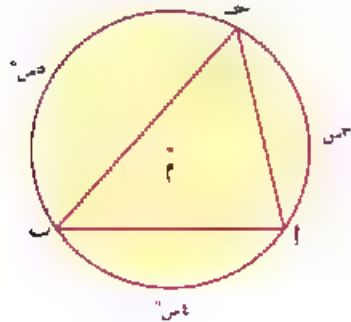
◆ ما نوع الزاوية المحيطية التى تقابل قوساً أصغر من نصف دائرة ؟ لماذا ؟

◆ ما نوع الزاوية المحيطية التى تقابل قوساً أكبر من نصف دائرة ؟ لماذا ؟

◆ هل الزاوية المحيطية القائمة تكون مرسومة فى نصف دائرة ؟ فسر إجابتك.



فى الشكل المقابل: أ ب ج مثلث مرسوم داخل الدائرة م، و (أ ب) : و (ب ج) : و (أ ج) = ٤ : ٥ : ٣
أوجد و (أ ج ب) :



العل :

نفرض أن :

$$\text{و } (\angle أ ب) = ٤س^\circ, \text{ و } (\angle ب ج) = ٥س^\circ, \text{ و } (\angle أ ج) = ٣س^\circ$$

$$\therefore ٣٦٠ = ٤س + ٥س + ٣س$$

$$\therefore ٣٠ = س$$

$$١٢٠ = ٤س$$

$$\therefore \text{ و } (\angle أ ب) = ١٢٠ - ٣٠ \times ٤ \text{ ويقابل } \angle أ ج ب \text{ المحيطية.}$$

$$\therefore \text{ و } (\angle أ ج ب) = \frac{1}{2} \text{ و } (\angle أ ب) \therefore \text{ و } (\angle أ ج ب) = \frac{1}{2} \times ١٢٠ = ٦٠^\circ$$



ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد قياس الزاوية أو القوس المطلوب في كل شكل:

١ أوجد: س، ق، (أب)

٢ أوجد: ق، (أ)، ق، (أج)

٣ أوجد: ق، (أج)، ق، (أب)

٤ أوجد: ق، (أج)

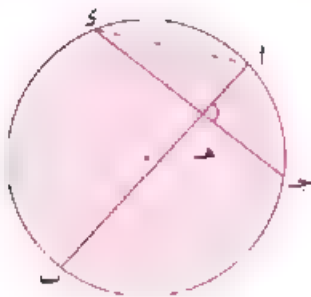
٥ أوجد: ق، (أهـ أج)

٦ أوجد: ق، (أد جـ ب)



تعريف مشهور (١)

إذا تقاطع وتران في نقطة داخل الدائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.



البرهان:

المعطيات: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

المطلوب: ق، (أهـ أج) = $\frac{1}{2}$ ق، (أج) + ق، (أب)

العمل: نرسم \overline{AD}

البرهان: Δ أهـ جـ خارجة عن Δ أهـ د.

$$\therefore \text{ق، (أهـ أج)} = \text{ق، (أد)} + \text{ق، (أج)} = \frac{1}{2} \text{ق، (أج)} + \frac{1}{2} \text{ق، (أب)}$$

$$= \frac{1}{2} [\text{ق، (أج)} + \text{ق، (أب)}].$$

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعاً هذه الزاوية.

الهدف:

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{H\}$

المطلوب: $\angle H = \frac{1}{2} (\angle \text{القوس الأكبر} - \angle \text{القوس الأصغر})$

العمل: نرسم \overline{BH} .

البرهان: ΔABH خارجة عن ΔBHD .

$$\therefore \angle H + \angle ABH = \angle BHD$$

$$\therefore \angle H = \angle BHD - \angle ABH$$

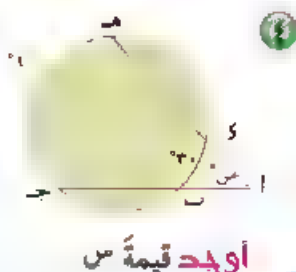
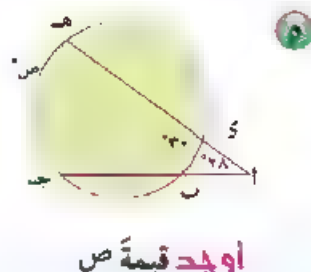
$$= \frac{1}{2} (\angle \text{القوس الأكبر} - \angle \text{القوس الأصغر})$$

$$= \frac{1}{2} (\angle \text{القوس الأكبر} - \angle \text{القوس الأصغر})$$

وهو المطلوب



في كل من الأشكال الآتية.



الحل

البرهان: " (بجاء) = ٢٦°

∴ جواب \cap هو $\{ \}$

$$[52 - (\text{جـ})] \frac{1}{2} = 40 \therefore$$

(وهو المطلوب أولاً)

وهـ (ـهـ س جـ) = $\frac{1}{4} - [52 + 132] \times \frac{1}{4} = 92 - 184 = 92^\circ$ (وهو المطلوب ثانياً)

وق (ا) = ٣٦، وق (هـ ج) = ١٠٤، وق (ب ج) = وق (و هـ)

أولاد: (بى) و (وھ).

الحل

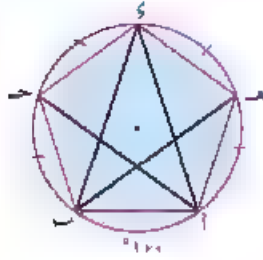
اکمل: $\therefore \text{جیب} \cap \text{ہی} = \{1\}$

∴ $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \frac{1}{4} = 36 \text{ و } (ب) = 32 \text{ (المطلوب أولاً)}$$
$$^{\circ}224 = (^{\circ}32 + ^{\circ}104) - ^{\circ}360 = (\text{ب ج}) 9 + (\text{د ه}) 9 \therefore$$
$$\textcircled{\text{ب ج}} \cup = \textcircled{\text{د ه}} \cup$$

∴ (٥ هـ) = ١١٢° (المطلوب ثانياً)

القوس



مكة ٩ سامش



سوف نتعلم

☆ كيفية استنتاج العلاقة

بين الزوايا المحيطية التي
تحصر أقواسًا متساوية
في القياس.

في الشكل المقابل : ق (أب) = ١٠٠°

♦ هل تحصر الزوايا المحيطية \angle أ ه ب ، \angle أ ي ب ، \angle أ ج ب نفس القوس؟

♦ أوجد ق (أ ه ب) ، ق (أ ي ب) ، ق (أ ج ب).

ماذا تلاحظ؟

♦ هل الزوايا المحيطية التي تحصر أقواسًا متساوية في القياس، تكون
متساوية في القياس؟ فسر إجابتك؟

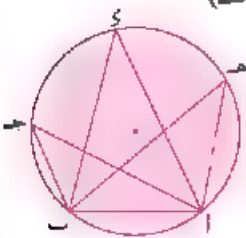
الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في
الدائرة الواحدة متساوية في القياس.

نظرية
٢المعطيات: \angle ج ه ، \angle د ي ، \angle ه زوايا محيطية مشتركة في أ ب.

المطلوب: ق (أ ج) = ق (أ د) = ق (أ ه)

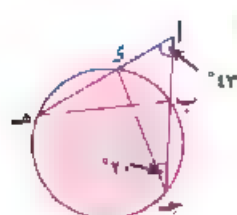
البرهان: \therefore ق (أ ج) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ب)، ق (أ د) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ب)، ق (أ ه) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ب) \therefore ق (أ ج) = ق (أ د) = ق (أ ه)

وهو المطلوب.





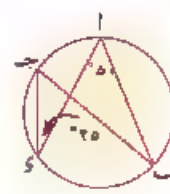
ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد قياسات الزوايا المبينة أسفل كل شكل:



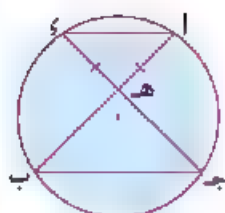
و (أ ب هـ)، و (أ ب هـ)، و (أ ب هـ)



و (أ ج)، و (أ ج)، و (أ ج)



و (أ ج)، و (أ ج)، و (أ ج)



في الشكل المقابل:

أ ب ∩ ج د = هـ، هـ أ = هـ د

أثبت أن: هـ ب = هـ ج.

الحل:

في $\triangle اهـ د$ $\therefore هـ أ = هـ د$ $\therefore \angle (أ) = \angle (د)$ ١

$\therefore \triangle ا ب ج$ ، $\triangle ا د ج$ محيطتان تحصران $\widehat{أ ج}$ $\therefore \angle (أ) = \angle (د)$ ٢

$\therefore \triangle ا ب ج$ ، $\triangle ا د ج$ محيطتان تحصران $\widehat{أ ج}$ $\therefore \angle (أ) = \angle (د)$ ٣

من ١، ٢، ٣ نستنتج أن: $\angle (أ) = \angle (د)$

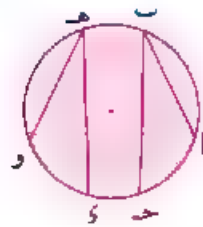
في $\triangle هـ ب ج$ $\therefore \angle (أ) = \angle (د)$ $\therefore هـ ب = هـ ج$ (وهو المطلوب)

الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية في القياس في
الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) متساوية في القياس

لاحظ أن :

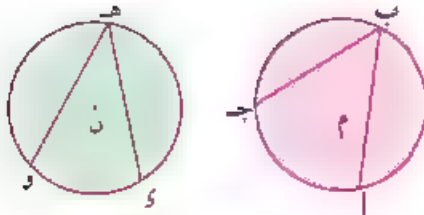
① في الدائرة م إذا كان : $\widehat{و ه} = \widehat{ا ج} = \widehat{ك و}$

فإن : $\angle و (ب) = \angle و (هـ)$



② لأي دائرتين م، ن إذا كان : $\widehat{و ه} = \widehat{ا ج} = \widehat{ك و}$

فإن : $\angle و (ب) = \angle و (هـ)$



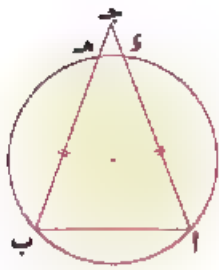
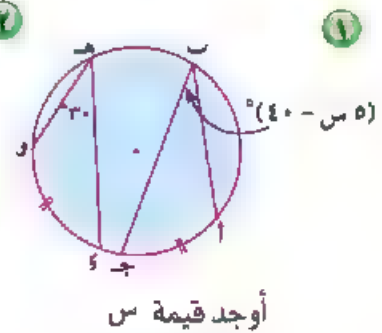
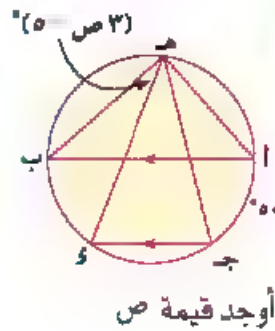
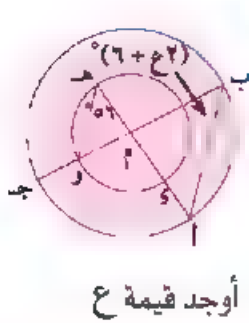
③ عكس النتيجة السابقة صحيح ، أي أن :

الزوايا المحيطية المتساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) تحصر أقواساً متساوية في القياس .

هل كل وترين لا يقاطعان داخل الدائرة ويحصران قوسين
متطابقين. منواريين ؟ فسر إجابتك



في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :



في الشكل المقابل:

أى ، ب ه وتران متساويان في الطول في الدائرة ، أى \cap ب ه = ج ه .
أثبت أن : ج د = ج ه .

الحل :

المعطيات: أى = ب ه

المطلوب: إثبات أن : ج د = ج ه

البرهان: \therefore أى = ب ه

\therefore ق (أى) = ق (ب ه)

ق (أى ه) = ق (ب ه د)

بإضافة ق (ه) لكلٍّ من الطرفين ينتج أن :

\therefore ق (أ ب) = ق (أ د)

في \triangle أ ب ج

\therefore ق (أ ب) = ق (أ د)

\therefore أ ج = ب ج

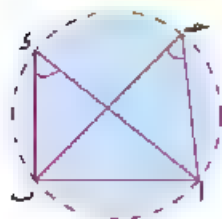
\therefore أى = ب ه

بطرح طرفي ٢ من ١ ينتج أن : ج د = ج ه

(وهو المطلوب)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة، وفي
جهة واحدة منها فإنه تمر براسيهما دائرة واحدة تكون هذه
القاعدة وترًا فيها.

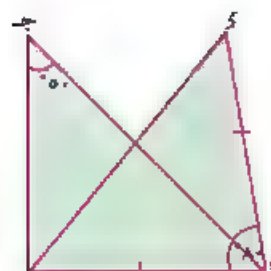
عكس
نظرية ٢



في الشكل المقابل لاحظ أن :
 $\angle C$ ، $\angle D$ مرسومتان على القاعدة \overline{AB} ، وفي جهة واحدة منها،
 $\angle C = \angle D$ (أو $\angle D = \angle C$)
فتكون : النقطة A ، B ، C ، D تمر بها دائرة واحدة، ويكون \overline{AB} وترًا فيها.



في الشكل المقابل : $AB = AD$ ، $\angle A = 80^\circ$ ، $\angle B = 50^\circ$ ،
أثبت أن : النقطة A ، B ، C ، D تمر بها دائرة واحدة.



العل :

في $\triangle ABD$

$$\therefore \angle B = \angle D, \angle A = 80^\circ$$

$$\therefore \angle C = \angle D = \angle B = 50^\circ = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2}$$

$$\therefore \angle C = \angle D = \angle B = 50^\circ$$

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة \overline{AB} وفي جهة واحدة منها.
 \therefore النقطة A ، B ، C ، D تمر بها دائرة واحدة



سوف نعلم

☆ مفهوم الشكل الرباعي

الدائري

☆ تحديد متى يكون الشكل

الرباعي دائرياً

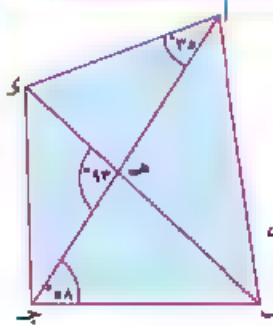
مصطلحات أساسية

☆ شكل رباعي دائري.

فكر 9 ناقش

في الشكل المقابل :

أ ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ ،

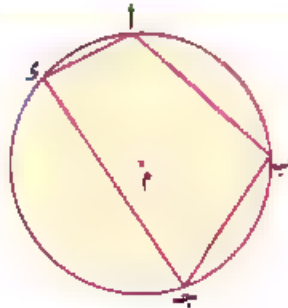
و $\angle أ ج ب = ٥٨^\circ$ ، و $\angle ج د ا = ٣٥^\circ$ ،و $\angle ج هـ د = ٩٣^\circ$.

هل يمكن رسم دائرة تمر برؤوس الشكل الرباعي أ ب ج د ؟ فسر إجابتك .

الشكل الرباعي الدائري هو شكل رباعي تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

لائحة :

❶ الشكل أ ب ج د رباعياً دائرياً ، لأن رؤوسه أ، ب، ج، د تنتمي للدائرة م .



❷ الشكل س ص ع ل رباعياً دائرياً لأن :

و $\angle ص س ع = ٩٠^\circ$ و $\angle ص ل ع = ٩٠^\circ$

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة

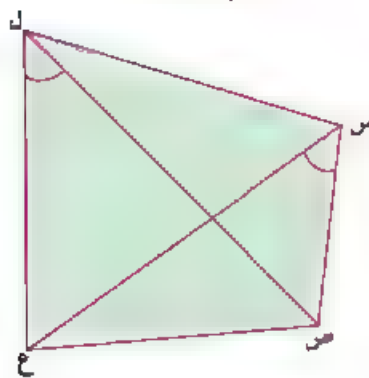
ص ع وفي جهة واحدة منها ،

فيمكن رسم دائرة تمر بالنقط

س، ص، ع، ل .

أي أن رؤوس الشكل س ص ع ل

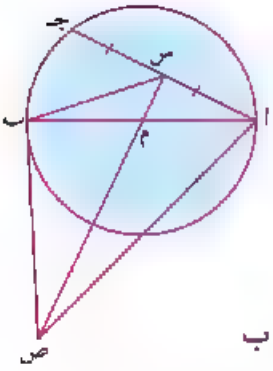
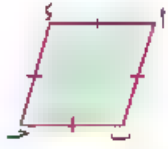
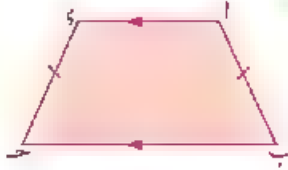
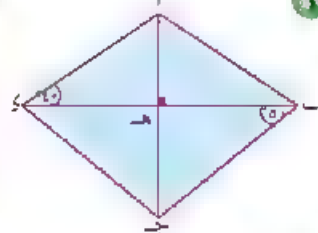
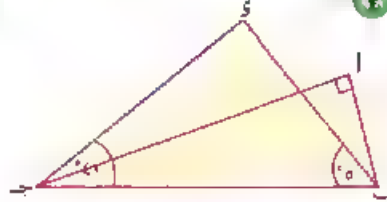
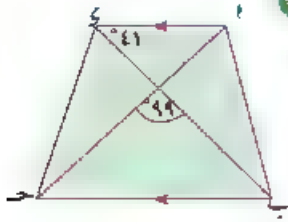
تنتمي لدائرة واحدة.



أجب عن السؤال الآتي في كراسة الفصل:



بين أي من الأشكال الآتية رباعياً دائرياً، فسر إجابتك.



في الشكلي المقابل:

أب قطر في الدائرة م، س منتصف أج، س م يقطع مماس الدائرة عند ب في ص. أثبت أن: الشكل أ س ب ص رباعي دائري.

الحل:

المعطيات: أب قطر في الدائرة م، اس = ج س، ب ص مماس للدائرة عند ب

المطلوب: إثبات أن: أ س ب ص رباعياً دائرياً.

البرهان: ∴ س منتصف أج، ∴ م س ⊥ أج، ∴ (Δ اس ص) = 90°

∴ أب قطر، ب ص مماس عند ب، ∴ ب ص ⊥ أب، ∴ (Δ اب ص) = 90°

∴ (Δ اس ص) = (Δ اب ص) = 90°

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة أص وفي جهة واحدة منها.

∴ الشكل أ س ب ص رباعي دائري.

مكرر في المثال السابق، أين يقع مركز الدائرة المارة بـ ووس الشكل

أ س ب ص؟ فسر إجابتك.

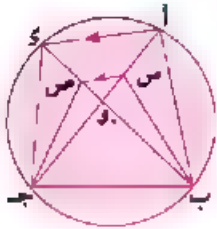




أ ب ج د γ شكل رباعي دائري تقاطع قطراه في و، \exists أ و، \exists و حيث $\overline{س س} // \overline{أ \gamma}$.
أثبت أن : **أولاً:** الشكل ب س ص ج رباعي دائري .

ثانياً: $\angle (س ب ص) = \angle (س ج ص)$

العمل :



المعطيات: أ ب ج د γ شكل رباعي مرسوم داخل دائرة س س $//$ أ γ
المطلوب: إثبات أن : **أولاً:** الشكل ب س ص ج رباعي دائري .
ثانياً: $\angle (س ب ص) = \angle (س ج ص)$

البرهان : \because س س $//$ أ γ

$\therefore \angle (ج د ا) = \angle (ج د س)$ **بالتناظر**

$\because \angle (ج د ا) = \angle (ج د ب)$ **محيطينان مشتركتان في ج د**

$\therefore \angle (ج د س) = \angle (ج د ب)$

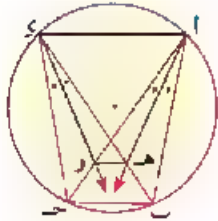
وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة ج د وفي جهة واحدة منها .

\therefore الشكل ب س ص ج رباعي دائري **(وهو المطلوب أولاً)**

\because الشكل ب س ص ج رباعي دائري **(إثباتاً)**

$\therefore \angle (س ب ص) = \angle (س ج ص)$

لأنهما زاويتان محيطينان مشتركتان في س ص **(وهو المطلوب ثانياً)**



في الشكل المقابل :

أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه :

أ ه ينصف ب ج ، د و ينصف ب ج

أثبت أن : أولاً: أ ه و د رباعي دائري .

ثانياً: ه و // ب ج

المعطيات: أ ب ج د شكل رباعي دائري

أ ه ينصف ب ج ، د و ينصف ب ج

المطلوب إثبات أن:

أولاً: أ ه و د رباعي دائري

ثانياً: ه و // ب ج

البرهان

ق (أ ب ج) = ق (ب ج د) (١) محيطيتان مشتركتان في ب ج

∴ أ ه ينصف ب ج

∴ ق (د ه أ) = ق (أ ب ج)

بالمثل ق (د ه و) = ق (ب ج د) (٢)

(من ١، ٢)

∴ ق (د ه أ) = ق (د ه و)

∴ الشكل أ ه و د رباعي دائري (وهو المطلوب أولاً)

∴ ق (د ه و) = ق (أ ب ج)

∴ ق (أ ب ج) = ق (أ ب ج)

∴ ق (د ه و) = ق (أ ب ج) وهما متناظرتان

∴ ه و // ب ج (وهو المطلوب ثانياً)

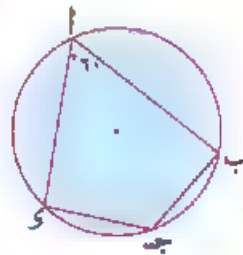


توضيح الشكل الرباعي الدائري



مكة 9 يافتن

في الشكل المقابل :



وه $(\angle) = 60^\circ$ ، فإن وه $(\angle \text{ج د}) = \dots$

♦ إذا كان وه $(\angle \text{أ د}) = \dots$

♦ إذا كان وه $(\angle \text{أ ب ج د}) = \dots$

♦ إذا كان وه $(\angle \text{أ ب}) = 80^\circ$ فإن وه $(\angle \text{د}) = \dots$

♦ ماذا تلاحظ على مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري.

سوف تتعلم

☆ خواص الشكل الرباعي

الدائري.

☆ كيفية حل مسائل على

خواص الشكل الرباعي

الدائري.

مصطلحات أساسية

☆ شكل رباعي دائري.

نظرية

٣

إذا كان الشكل الرباعي داخراً فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان

المعطيات: أ ب ج د شكل رباعي دائري .

المطلوب: إثبات أن : ① وه $(\angle \text{أ}) + وه (\angle \text{ج}) = 180^\circ$

② وه $(\angle \text{أ ب}) + وه (\angle \text{د}) = 180^\circ$

البرهان: ∴ وه $(\angle \text{أ}) = \frac{1}{4} وه (\angle \text{ب ج د})$

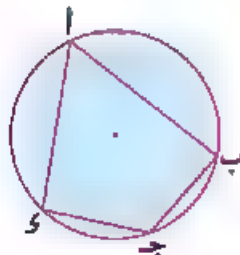
، وه $(\angle \text{ج}) = \frac{1}{4} وه (\angle \text{أ ب د})$

∴ وه $(\angle \text{أ}) + وه (\angle \text{ج}) =$

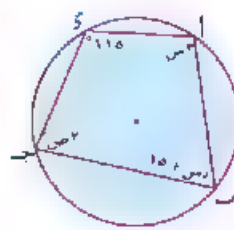
$\frac{1}{4} وه [وه (\angle \text{ب ج د}) + وه (\angle \text{أ ب د})] =$

$\frac{1}{4} وه 360^\circ = 90^\circ$

بالمثل: وه $(\angle \text{أ ب}) + وه (\angle \text{د}) = 180^\circ$ (وهو المطلوب)

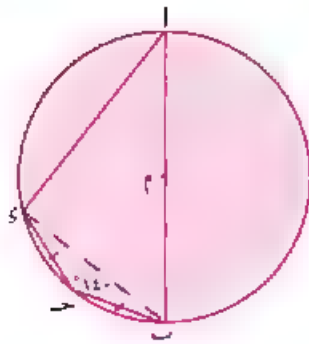


تدرب في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س، ص



أب جدى شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة م، م \in \overline{AB} ، جب = جدى، و $\angle (ب جدى) = 140^\circ$
 أوجد : أولا: و $\angle (أ)$ ثانيا: و $\angle (د)$

الحل :



(نظرية)

المطلوب أولا

جب = جدى

$$\therefore \angle (ب جدى) = \angle (أ جدى) = \frac{140 - 180}{2} = 20^\circ$$

$$\therefore \angle (أ ب) = 90^\circ$$

وهو المطلوب ثانيا

أب جدى شكل رباعي دائري

$$\therefore \angle (أ) + \angle (ب) = 180^\circ$$

$$\therefore \angle (أ) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

نرسم ب ي، في $\triangle ب جدى$

أب قطر في الدائرة م

$$\therefore \angle (أ ب) = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$$

قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.



في الشكل المقابل :

أب جدى رباعي دائري، م \in \overline{AB} ، م \in \overline{CD}

$\therefore \angle ب جدى$ زاوية خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جدى

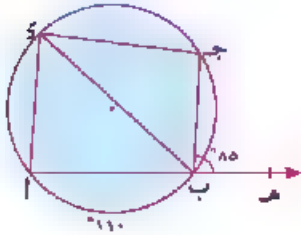
، $\angle د$ هي الزاوية الداخلة المقابلة لها .

فيكون : و $\angle (ب جدى) = \angle (د)$ (مكملات الزاوية الواحدة متساوية في القياس)



في الشكل المقابل:

هـ \exists أ ب ، هـ \nexists أ ب ، و (أ ب) = 110° ، و (أ ب هـ) = 85°
أوجد و (أ ب ي جـ) .

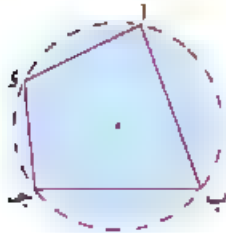


النتيجة
(وهو المطلوب)

∴ و (أ ب) = 110° ، Δ أ ب زاوية محيطية قوسها أ ب
∴ و (أ ب) = $\frac{1}{2}$ و (أ ب) = 55° .
∴ Δ جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ د
∴ و (أ ب هـ) = و (أ جـ د) = 85°
 Δ ب ي جـ = $85^\circ - 55^\circ = 30^\circ$

إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان في شكل رباعي كان هذا
الشكل رباعيا دائريا

عكس
نظرية ٣



في الشكل المقابل :

إذا كان و (أ ب) + و (جـ د) = 180°

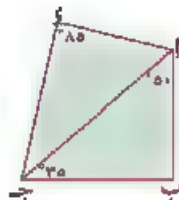
أو: و (أ ب) + و (جـ د) = 180°

فيكون الشكل أ ب جـ د رباعيا دائريا .

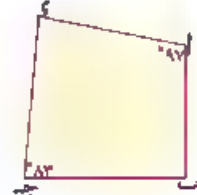
في كل من الأشكال الآتية أثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري :



٣

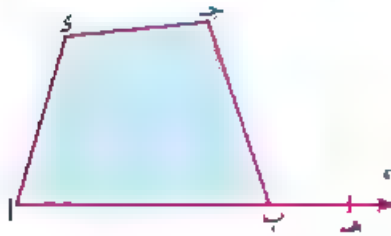


٢



١

إذا وجدت زاويةً خارجةً عن رأس من رؤوس شكل رباعيٍّ
قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة لهذا الرأس
كان الشكل رباعيًّا دائريًّا



في الشكل المقابل :

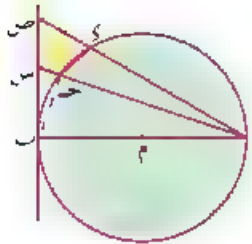
أ ب ج د شكل رباعي، $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$ ، $\angle \text{ج} = \angle \text{د}$

$\therefore \angle \text{ب}$ زاوية خارجة عن الشكل الرباعي أ ب ج د،
 $\angle \text{أ}$ هي الزاوية الداخلية المقابلة لها .

فإذا كان $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$ و $\angle \text{ج} = \angle \text{د}$ يكون الشكل أ ب ج د رباعيًّا دائريًّا .



في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م، أ ج د وتران فيها وفي جهة واحدة من أ ب
رسم من ب مماس للدائرة قطع أ ج د في س، أ د في ص .
أثبت أن : الشكل س ص د ج رباعي دائري .

الحل :

نرسم ب ج \therefore أ ب قطر

$\therefore \angle \text{أ} = \angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$ تتم $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$

\therefore أ ب قطر ، ب ص مماس للدائرة عند ب .

$\therefore \angle \text{أ} = \angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$ تتم $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$

من ١ ، ٢

$\therefore \angle \text{أ} = \angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$

$\therefore \angle \text{أ} = \angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$

$\therefore \angle \text{أ} = \angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$

$\therefore \angle \text{أ} = \angle \text{ب} = 90^\circ$ ، $\angle \text{أ} = \angle \text{ب}$

\therefore الشكل س ص د ج رباعي دائري .

مكرر متى يكون الشكل الرباعي دائريًّا ؟ اذكر جميع الحالات الممكنة ؟



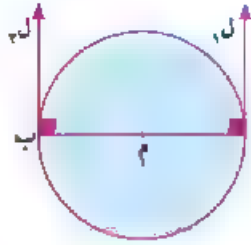


سوف نتعلم

- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين القطعتين المماسيتين المرسومين من نقطة خارج دائرة.
- ☆ مفهوم الدائرة الداخلية لمضلع.
- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين.
- ☆ كيفية حل مسائل على العلاقة بين مماسات الدائرة.

مصطلحات أساسية

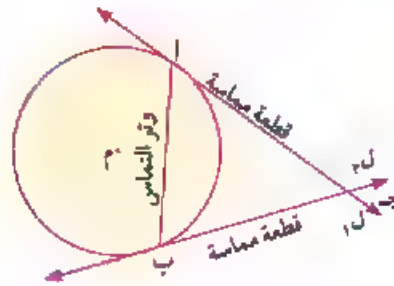
- ☆ وتر التماس.
- ☆ دائرة داخلية لمضلع.
- ☆ مماسات مشتركة.



علمت أن المماسين المرسومين عند نهايتي قطر في الدائرة متوازيين .

ما العلاقة بين المماسين المرسومين عند نهايتي وتر في الدائرة لا يمر بمركزها ؟
في الشكل المقابل :

الحل أن :

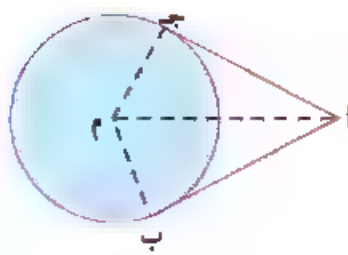


إذا كان \overline{AB} وترًا في الدائرة م ،
فإن المماسين L_1 ، L_2 يتقاطعان
في نقطة جـ .

وتسمى كل من جـ أ ، جـ ب قطعة مستقيمة مماسة ، كما تسمى \overline{AB} وتر التماس .

نظرية ٤

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة مساويتان في الطول .



المعطيات: أ نقطة خارج الدائرة م ،

\overline{AB} ، \overline{AC} قطعتان مماستان
للدائرة عند ب ، جـ .

المطلوب: إثبات أن : $\overline{AB} = \overline{AC}$

العمل: نرسم م ب ، م جـ ، م أ

البرهان: ∴ \overline{AB} قطعة مماسة للدائرة م

∴ \overline{AC} قطعة مماسة للدائرة م

∴ المثلثان $\triangle ABM$ ، $\triangle ACM$ فيهما :

$$\therefore \angle ABM = \angle ACM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAM = \angle CAM$$

(اثباتاً)

(أطوال أنصاف أقطار)

$$\therefore \triangle ابم \equiv \triangle اجم$$

(وهو المطلوب)

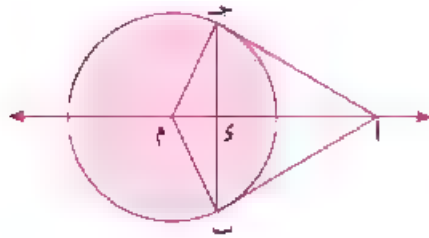
$$\therefore اب = اج$$

$$\angle اب = \angle اج = 90^\circ$$

$$مب = مج$$

أم ضلع مشترك.

$$\text{ويستج أن: } \overline{اب} \equiv \overline{اج}$$



في الشكلي المقابل :

فكر



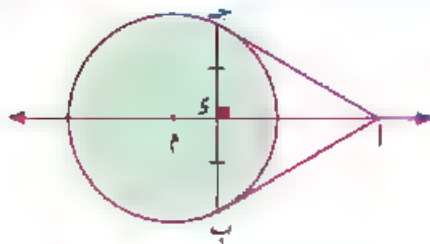
◆ لماذا يكون $\overline{ام}$ محور ب ج ؟

◆ لماذا ينصف $\overline{ام}$ $\angle اباج$ ؟

◆ لماذا ينصف $\overline{ام}$ $\angle ب م ج$ ؟

نتائج الثابتة:

المستقيم المار بمركز الدائرة. ونقطة تقاطع مماسين لها يكون مهوراً لوتر التعاس لهذين المماسين.



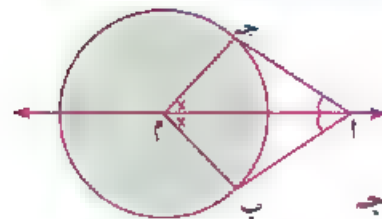
في الشكلي المقابل :

$\overline{اب}$ ، $\overline{اج}$ مماسين للدائرة م عند ب، ج.

فإن: $\overline{ام}$ محور ب ج

ويكون: $\overline{ام} \perp \overline{ب ج}$ ، $\angle ب م ج = \angle ج م ب$

المستقيم المار بمركز الدائرة. ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الراوية بين هدين المماسين. كما ينصف الراوية بين نصف القطرين الخارجين بنقطتي التعاس.



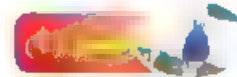
في الشكلي المقابل :

$\overline{اب}$ ، $\overline{اج}$ مماستان للدائرة م عند ب، ج.

فإن: $\overline{ام}$ ينصف $\angle ا$

$$\therefore \angle ابام = \angle اجام، \overline{ام} \text{ ينصف } \angle ب م ج$$

$$\therefore \angle امب = \angle امج$$



س أ ، ص ب محاسن للدائرة عند أ ، ب .

أثبت أن : **اولا** : \overleftarrow{ab} ينصف $\angle \gamma$ و $\overleftarrow{a\gamma}$ // \overleftarrow{mb} . **ثانيا** : $\overleftarrow{a\gamma}$ // \overleftarrow{mb} .

الحل

المعطيات: س أ ، س ب مماسان للدائرة، و (أ س ب) = 70° ، و (ي ج ب) = 125° .

المطلوب: أولاً: \overrightarrow{AB} ينصف $\angle C$ أي $\angle C$ ثانياً: $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

البرهان: "س ا، س پ قطعان مجامستان. . س ا = س پ

في Δ س ا ب $\therefore \angle$ س ا ب = \angle س ب ا ، و \angle س = \angle ب

$$a_{00} = \frac{Y_0 - 1A_0}{2} = (\text{س ا ب})$$

∴ الشكل اب جد رباعي دائري، و $(\angle ج) = 125^\circ$

$$^{\circ}00 = ^{\circ}120 - ^{\circ}120 = (\angle \text{و ا ب}) \therefore$$

من ١، ٢ ينتج أن: $\varphi(\Delta_S \text{ أب}) = \varphi(\Delta_I \text{ أب}) = 55^\circ$

∴ اب ینصف داس

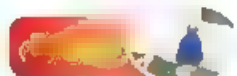
∴ (Δ س ب ا) = ۱۹ (Δ و ا ب) = ۰۰۰

∴ ای // من پ

(المطلوب أولاً)

وہما متبادلان

(المطلوب ثانياً)



ا.ب.ج. قطعان معاستان للدائرة م عند ب، ج.

ام \cap ب ج = {س}، ص منتصف الوتر ب د

۱۹. $(\Delta \text{ س ص م}) = ۳۵^\circ$.

أثبت أن: الشكل س ب ص م رباعي دائري.

الحل:

∴ \overline{AB} ، \overline{AJ} قطعتان مماستان للدائرة م عند ب، جـ.

∴ \widehat{AM} محور ب جـ، $\widehat{Q} = (\Delta \text{ ب س م}) = 90^\circ$

∴ ص منتصف الوتر ب و

∴ $\widehat{Q} = (\Delta \text{ ب ص م}) = 90^\circ$

(وهو المطلوب أولاً)

من ①، ② ∴ الشكل س ب ص م رباعي دائري.

نرسم ب م

∴ الشكل س ب ص م رباعي دائري، $\widehat{Q} = (\Delta \text{ س ص م}) = 35^\circ$.

∴ $\widehat{Q} = (\Delta \text{ س ب م}) = \widehat{Q} = (\Delta \text{ س ص م}) = 35^\circ$

∴ \overline{AB} قطعة مماسة، م ب نصف قطر

∴ $\widehat{Q} = (\Delta \text{ أ ب ج}) = 90^\circ$ و $\widehat{Q} = (\Delta \text{ أ ب ج}) = 55^\circ = 90^\circ - 35^\circ$

∴ $\widehat{Q} = (\Delta \text{ أ ب م}) = 90^\circ$

∴ $\widehat{Q} = (\Delta \text{ أ ب ج}) = \widehat{Q} = (\Delta \text{ أ ب ج}) = 55^\circ$

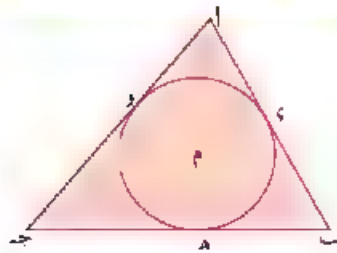
∴ $\widehat{Q} = \widehat{A} = \widehat{B}$

(وهو المطلوب ثانياً)

∴ $\widehat{Q} = (\Delta \text{ أ ب ج}) = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ) = 70^\circ$

تعريف

الدائرة الداخلة لمضلع هي الدائرة التي تمس جميع أضلاعه من الداخل.



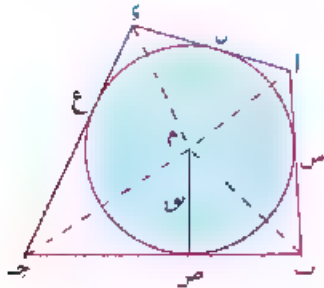
في الشكل المقابل:

م هي الدائرة الداخلة للمثلث أ ب جـ لأنها تمس أضلاعه من الداخل في و، هـ، و.

أي أن: المثلث أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة م.

مركز هل مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه

الداخله ؟ فسر إجابتك.



في الشكل المقابل:

م دائرة داخلة للشكل الرباعي أ ب جـ و،

طول نصف قطرها ٥ سم، أ ب = ٩ سم جـ و = ١٢ سم.

أوجد محيط الشكل أ ب جـ و ثم احسب مساحته.

الحل

∴ الدائرة م دائرة داخلية للشكل الرباعي اب ج د

∴ الدائرة م تماس أضلاع الشكل اب ج د في س، ص، ع، ل

∴ $\overline{اس}$ ، $\overline{ال}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ $اس = ال$

∴ $\overline{ب س}$ ، $\overline{ب ص}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ $ب س = ب ص$

بالمثل يكون $ج د = ج ص$ ∴ $د ع = د ل$

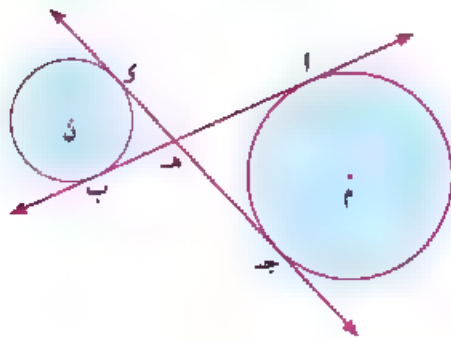
بالجمع يتج أن: $(اس + ب س) + (ج د + د ع) = (ال + ب ص + ج ص + د ل)$

∴ $اب + ج د = ا د + ب ج$ ∴ $\frac{1}{4}$ محيط الشكل اب ج د

محيط الشكل اب ج د $= 2(١٢ + ٩) = ٤٢$ سم،

مساحة الشكل اب ج د $= \frac{1}{4} اب \times ب + \frac{1}{4} ب ج \times ج + \frac{1}{4} ج د \times د + \frac{1}{4} د ا \times ا =$

$\frac{1}{4}$ محيط الشكل $\times ب = \frac{1}{4} \times ٤٢ \times ٥ = ١٠٥$ سم^٢



المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين

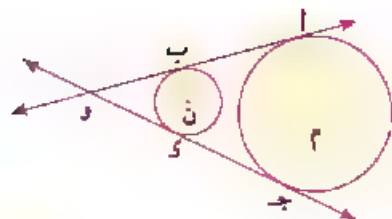
يسمى $\overline{اب}$ مماس مشترك داخلي للدائرتين م، ن

لأن الدائرتين م، ن تقعان في جهتين مختلفتين

من $\overline{اب}$ ، كما أن $\overline{ج د}$ مماس داخلي للدائرتين.

لاحظ أن: $\overline{اب} \cap \overline{ج د} = \{هـ\}$

في الشكل المقابل: أثبت أن: $اب = ج د$



يسمى $\overline{اب}$ مماس مشترك خارجي للدائرتين م، ن،

لأن الدائرتين م، ن تقعان في جهة واحدة من $\overline{اب}$ ،

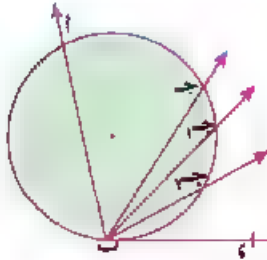
كما أن $\overline{ج د}$ مماس خارجي للدائرتين.

لاحظ أن: $\overline{اب} \cap \overline{ج د} = \{و\}$

في الشكل المقابل: أثبت أن: $اب = ج د$

الزوايا المحيطة

شكر وناقش



في الشكلي المقابل :

△ $\widehat{أ ب ج}$ زاوية محيطية ضلعاها $\overrightarrow{أ ب}$ ،
 $\overrightarrow{ب ج}$ وقوسها $\widehat{أ ج}$ ، $\overrightarrow{ب ي}$ مماس للدائرة
 عند $\overrightarrow{ب}$. إذا تصورنا دوران أحد ضلعي
 الزاوية المحيطية ، وليكن $\overrightarrow{ب ج}$ مبتعداً
 عن $\overrightarrow{أ ب}$ ، فيأخذ أحد الأوضاع $\overrightarrow{ب ج}$ ، $\overrightarrow{ب ج}$ ،

♦ هل يزداد قياس الزاوية المحيطية الناشئة مثل △ $\widehat{أ ب ج}$ ، △ $\widehat{أ ب ج}$ ،

♦ هل يزداد $\widehat{أ ج}$ ، $\widehat{أ ج}$ ، $\widehat{أ ج}$ ،

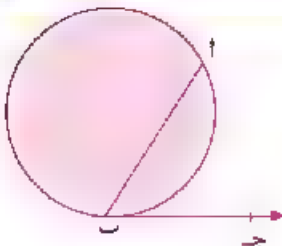
♦ إذا انطبق $\overrightarrow{ب ج}$ على $\overrightarrow{ب ي}$ ماذا تلاحظ ؟

النتيجة أننا نحصل على أكبر زاوية محيطية في القياس حينما يكاد ينطبق

$\overrightarrow{ب ج}$ على $\overrightarrow{ب ي}$ وتسمى △ $\widehat{أ ب ي}$ عندئذ بالزاوية المماسية ، وهي
 حالة خاصة من الزاوية المحيطية وعندها يكون :

$$\widehat{أ ب ي} = \frac{1}{2} \widehat{أ ج ب}$$

الزاوية المماسية هي الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما
 مماس للدائرة ، والآخر يحمل وترأ في الدائرة
 يمر بنقطة التماس



ويكون :

قياس الزاوية المماسية نصف قياس القوس
 المحصور بين ضلعيها .

$$\text{أي أن : } \widehat{أ ب ج} = \frac{1}{2} \widehat{أ ب}$$



سوف تتعلم

☆ مفهوم الزاوية المماسية .

☆ كيفية استنتاج علاقة

الزاوية المماسية بالزاوية

المحيطة المشتركة معها

في القوس .

☆ علاقة الزاوية المماسية

بالزاوية المركزية المشتركة

معها في القوس .

☆ كيفية حل المسائل على

الزاوية المماسية .

مصطلحات أساسية

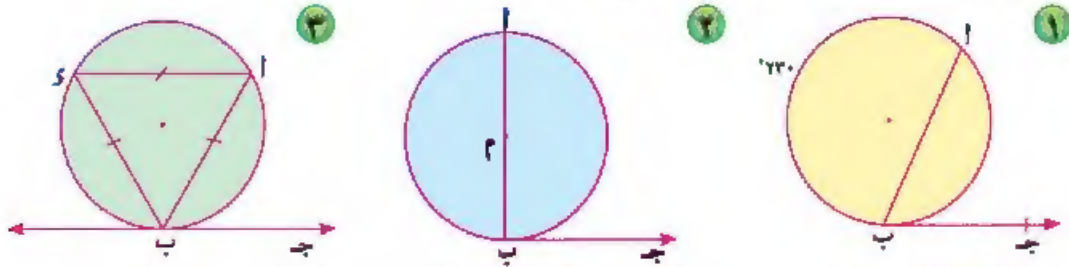
☆ زاوية مماسية .

☆ زاوية محيطية .

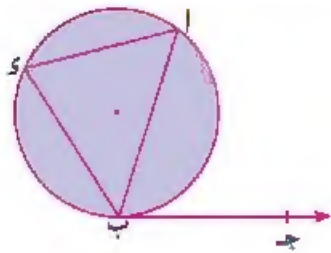
☆ زاوية مركزية .



في كلٍّ من الأشكال الآتية احسب \angle (أ ب ج) .



نظرية ه قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.



المعطيات: \angle أ ب ج زاوية مماسية، \angle س زاوية محيطية .

المطلوب: إثبات أن: \angle أ ب ج = \angle س (أ ب ج) و (س)

البرهان: $\because \angle$ أ ب ج زاوية مماسية

١ $\therefore \angle$ أ ب ج = $\frac{1}{2} \angle$ (أ ب ج) و (أ ب ج)

$\because \angle$ س زاوية محيطية

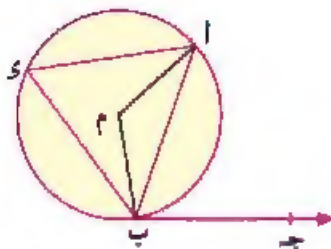
٢ $\therefore \angle$ س = $\frac{1}{2} \angle$ (أ ب ج) و (أ ب ج)

من ١، ٢ يتبع أن:

\angle أ ب ج = \angle س (أ ب ج) و (س)

وهو المطلوب

تلمحة قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس.



(نظرية)

(نظرية)

في الشكل المقابل :

ب ج مماس للدائرة م، أ ب وتر التماس

$\therefore \angle$ أ ب ج = \angle س (أ ب ج) و (س)

$\because \angle$ س = $\frac{1}{2} \angle$ (أ م ب) و (أ م ب)

$\therefore \angle$ أ ب ج = $\frac{1}{2} \angle$ (أ م ب) و (أ م ب)

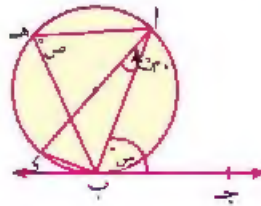


في كل من الأشكال الآتية: $\vec{ب ج}$ مماس للدائرة، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.

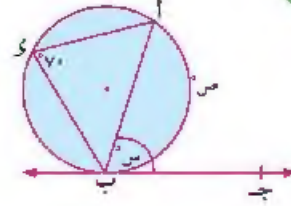
٣



٢



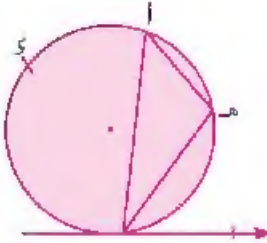
١



ملاحظة هامة :

الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطة المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفي جهة واحدة منه .

أي أن : $\triangle اب ج$ تكمل $\triangle ا هـ ب$.



مثال (١)



أب ج مثلث مرسوم داخل دائرة، $\vec{ب و}$ مماس للدائرة عند ب،

$س \in \overline{أ ب}$ ، $ص \in \vec{ب و}$ حيث $س س // \vec{ب و}$.

أثبت أن : الشكل أس ص ج رباعي دائري .

البرهان : $\because \vec{ب و}$ مماس للدائرة عند ب، $\overline{أ ب}$ وتر التماس . $\therefore \angle (أ ب و) = \angle (أ ب ج)$

$\because س س // \vec{ب و}$ ، $\overline{أ ب}$ قاطع لهما $\therefore \angle (أ ب و) = \angle (أ ب س)$

$\therefore \angle (أ ب س) = \angle (أ ب ج)$

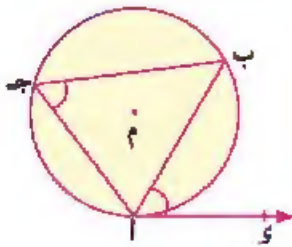
$\therefore \triangle ب س ص$ خارجة عن الشكل الرباعي س ص ج أ .

\therefore الشكل س ص ج أ رباعي دائري

(وهو المطلوب)

إذا رُسم شعاعٌ من أحد طرفي وتر في دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة.

**عكس
نظرية هـ**

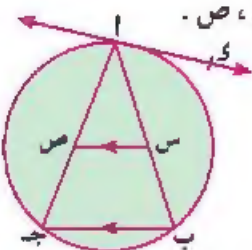


أي أن :

إذا رسمنا \overrightarrow{AC} من أحد طرفي الوتر \overline{AB} في الدائرة $\odot O$ وكان :
 $\angle CAB = \angle ACB$ فإن \overrightarrow{AC} مماس للدائرة $\odot O$.

مثال (٢)

أب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة، \overrightarrow{AO} مماس للدائرة عند أ، $\odot O$ ، \overline{AB} ، \overline{AC} حيث $\overline{AS} \parallel \overline{BC}$ أثبت أن : \overrightarrow{AO} مماس للدائرة المارة بالنقط أ، س، ص.



الحل

المعطيات : \overrightarrow{AO} مماس للدائرة، $\overline{AS} \parallel \overline{BC}$

المطلوب : إثبات أن : \overrightarrow{AO} مماس للدائرة المارة بالنقط أ، س، ص.

البرهان : $\because \overrightarrow{AO}$ مماس، \overline{AB} وتر التماس $\therefore \angle CAB = \angle ACB$ (١)

$\because \overline{AS} \parallel \overline{BC}$ ، \overline{AB} ، \overline{AC} قاطع لهما $\therefore \angle CAS = \angle ACB$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن : $\angle CAB = \angle CAS$

أي أن : $\angle CAS = \angle ACS$

$\therefore \overrightarrow{AO}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ، س، ص.

المواصفات الفنية

مقاس الكتاب	(٢٧×١٩,٥) سم
طبع المتن	٤ لون-١ لون
طبع الغلاف	٤ لون
ورق المتن	٧٠ جم أبيض
ورق الغلاف	١٨٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف	١٦٤ صفحة
رقم الكتاب	١٠/٣/٢٢/٢/٤١/٢٤٧

<http://elearning.moe.gov.eg>

المصنع الدولي لتحويل الورق
(أولاد كمال فتح الله خضر)